8.

SII

400

Ivo

Math. P. 496

Mathesis. Trigonometria 319.

Carl Scherffers

theoretische und praktische

Ebene Trigonometrie

aus dem lateinischen übersezt, mit Anmerkungen.

Nebst dazu gehörigen Kupfern.

Halle

gedruckt und verlegt im Waisenhause

1782.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Es ist diese Uebersetzung der Scherfferschen ebenen Trigonometrie, die ich hier dem mathematischen Publiko vorlege, eigentlich der zweyte Theil von der aus drey Theilen bestehenden und in lateinischer Sprache abgefaßten Geometrie des durch seine vortreflichen mathematischen Schriften in dem besten Rufe stehenden Herrn

Carl Scherffers, des ehemaligen Jesuiter Ordens berümten Mitgliedes, von welcher der erste Theil die Elementargeometrie, der zweyte, als der vorliegende, die ebene Trigonometrie, und der dritte die höhere Geometrie enthält*. In dem Entschluß, diesen Theil ins Teutsche zu übersetzen, brachte mich sowol die Vorstellung, daß die lehrreichen Scherfferschen Arbeiten noch nicht so allgemein bekannt sind, als sie es zu seyn verdienen, welches ohne Zweifel mit daher rühren mag, daß sie grösstentheils lateinisch abgefaßt sind, als auch die bekannte Erfahrung, daß nicht wenige von denen, die sich mit der Mathematik beschäftigen, die lateinische Sprache nicht erlernt haben, oder sie doch nicht so fertig verstehen, daß sie ein Buch von einem solchem

* Der Titel von dem ersten Theile dieses Werks ist: Institutionum Geometricarum pars Ima, sive Geometria elementaris, conscripta in usum tironum a P. Carolo Scherffer e soc. J. MDCCLXX. Vindobonæ.

chem Inhalte, als das gegenwärtige ist, ohne oft aufgehalten zu werden, sollten lesen können. Daher kann ich nicht ohne Grund hoffen, daß ich manchem Freunde der Mathematik eine nicht geringe Gefälligkeit erzeige, wenn ich ihm zum Gebrauche eines Schriftstellers beförderlich bin, der wegen seiner Deutlichkeit, Ordnung und Genauigkeit schätzungswürdig ist.

Da ich nicht das ganze Scherfferſche Werk zu übersetzen Willens war, so glaubte ich bey dem bekannten Ueberfluß geometrischer Schriften und Mangel an trigonometrischen meinen Fleiß nicht verdienstlicher machen zu können, als wenn ich ihn an diesen zweyten Theil wendete, zumahl da der gelehrte Herr Verfasser auch hier geschäftig genug gewesen ist, seinen Lesern nützlich zu werden und seinen Unterricht nicht allein für Anfänger gehörig herabzustimmen gewußt, sondern auch manches in

denselben hineingestreuet hat, das den Verstand derer beschäftigen kann, die über die Erlernung der ersten trigonometrischen Kenntnisse schon hinaus sind. Bey jenen hoffe ich gewis durch meine Arbeit Dank zu verdienen. Der vorangeschikte theoretische Theil wird ihnen sehr lehrreich seyn, und ihnen die ersten Anfangsgründe dieser edlen Wissenschaft in ein deutliches Licht setzen. Sie können aber auch, wenn sie insonderheit den ganzen zweyten Abschnitt des ersten Capitels und das ganze dritte genau durchgehen wollen, ihre Kenntnisse weiter ausbreiten, in die feinere Theorie der Wissenschaft eindringen und sich dadurch in den Stand setzen, die Schriften gründlicher theoretischen Mathematiker, eines Kästners und Karstens verstehen zu lernen. Aus dem praktischen Theile, welcher sehr ausführlich ist, werden nicht allein Anfänger der praktischen Meßkunst, sondern auch die, die hierinnen schon zu mehrerern Kenntnissen und Fertigkei-

tigkeiten gelangt sind, nicht geringen Nutzen schö-
pfen. Der in demselben gegebene Unterricht von
dem Messen der Grundlinien, von den Instrumen-
ten, mit welchen die Winkel gemessen werden, in-
gleichen von andern zum Messen nützlichen und
nothwendigen Werkzeugen, von denen einige noch
nicht genug bekannt sind, ist jedem Praktiker un-
entbehrlich. Mit vieler Einsicht und Genauigkeit
hat der Herr Verfasser auf die beym Messen und
Gebrauch der dazu dienenden Instrumente sich so
leicht einschleichenden Fehler Rükficht genommen
und deutlich gezeigt, wie man sie berechnen und
vermeiden könne. Es wird daher ein aufmerksa-
mer Beobachter durch die Benutzung der in diesem
Stükke ertheilten Lehren und Regeln seine Arbeiten
zu beurtheilen und manchen Fehlern auszuweichen
lernen, die er sonst begangen und nicht bemerkt ha-
ben würde, wenn er nicht durch den Unterricht des

Herrn Verfassers vorsichtiger und mißtrauischer gegen seine eigenen Arbeiten geworden wäre.

Wer auch nur geometrischer Praktiker ist, und keine Kenntniß von der Trigonometrie hat, wird seine Einsichten durch diese Abhandlung sehr erweitern und berichtigen können; inzwischen wünsche ich, daß sie die Anzahl der Freunde und Liebhaber dieser ihres Nutzens wegen sich so auszeichnenden Wissenschaft vermehren und das Vorurtheil derer möge stürzen helfen, die wider alle Wahrheit, aus Furcht, durch ihre Erlernung ihrem Verstande ein Joch aufzulegen, sie lieber für unnütz erklären, und sich mit der geometrischen Auflösung praktischer Aufgaben begnügen, da doch das Gegentheil hiervon schon so oft und mit Gründlichkeit gesagt worden ist, und die Richtigkeit, die man durch die trigonometrischen Berechnungen bey seiner Arbeit erhält, die wenige Mühe, die man zur Erlernung

der zu den gewöhnlichen Aufgaben nöthigen Auflö-
sung sich zu geben hat, reichlich genug belohnt*.

Bey den Aufgaben die Theilungen der Felder betreffend, hat sich zwar der Herr Verfasser sehr kurz gefaßt; indessen ist es auch gewis, daß die Fälle, die hieher gehören, sehr leicht durch die in der Planimetrie vorkommenden Aufgaben und Lehrsätze behandelt werden können. Desto angenehmer muß den Lesern der ausführliche Unterricht

* Wirklich giebt es eine grosse Anzahl von Personen, die sich von diesem Irrthume oder vielmehr Eigensinne nicht befreyen lassen wollen. In der Anmerk. zum 128. §. habe ich gezeigt, wie sehr sich ein Fehler durch geometrische Behandlung vergrössern lasse. Bey der Aufgabe des 131. §. würde die Linie AB, die man zu messen hat, wenn sie von beträchtlicher Länge, und in Rüksicht auf sie die Grundlinie DE sehr kurz und etwa kaum $\frac{1}{4}$ von ihr wäre, auch keine parallele Lage gegen sie hätte, gewis sehr unvollkommen und fehlerhaft erhalten werden, wollte man sich auch des Vortheils im 128. §. bedienen.

von der Libellation seyn, den sie vom 202 bis 245 §. erhalten, weil bey trigonometrischen Arbeiten von irgend einiger Grösse die Krümmung der Erdkugel keinesweges unbemerkt gelassen werden darf, und auf sie nothwendig Rükſicht genommen werden muß, wenn man nicht Gefahr laufen will, Fehler, die nicht unbeträchtlich sind, zu begehen. Die zu diesem Behuf berechnete und beygefügte Tafel, worinn die Elevationen zum Grunde gelegt, und nach denselben die Weiten, ingleichen die Winkel am Centro der Erde und der Strahlenbrechung berechnet sind, habe ich in den drey lezten Kolumnen verbessert, und also zum Gebrauch sicherer gemacht, als sie im Originale selbst ist. Es sind nehmlich die in denselben aufgeführten Grössen daselbst durch ein Versehn um die Hälfte zu klein genommen, daher mußte ich sie alle verdoppeln, wenn sie den Weiten und Elevationen, bey welchen sie stehen, angemessen seyn sollten.

Unter den hinter dem dritten Bande angezeigten

Druk-

Drukfehlern finde ich zwar diesen Fehler bemerkt, aber es würde doch leicht ein Leser, der hinter dem dritten Bande nicht mehr Verbesserungen für den zweyten (bey welchem sich so schon ein ansehnliches Verzeichniß von Drukfehlern befindet) suchte, oder ihn gar nicht besässe, dadurch irre geführt werden können, wenn er sich auf die Tafel verliesse, und die Rechnung nicht selbst untersuchte. Ein solches Mißtrauen aber kann das gute Vorurtheil, das gewis ein jeder Leser, der die Gründlichkeit der Arbeiten des gelehrten und sorgfältigen Herrn Verfassers kennt, für dieselben haben muß, wohl nicht leicht aufkommen lassen. Das muß ich indessen frey gestehen, daß ich im Originale noch verschiedene Drukfehler gefunden habe, die nirgends angezeigt sind, und wovon ich wünschte, daß sie ein so brauchbares Werk nicht entstellen, und manchem Leser das Vergnügen, welches er bey dem Vortrage dieser angenehmen Wahrheiten hat, nicht verbittern und ihn im Lesen aufhalten mögten. Folgende fallen

mir

mir jetzt noch bey, da ich sie nicht alle bemerkt habe. Seit. 14. (im Originale) steht in der 4. Zeile IFD statt AFD, Zeil. 7. von unten GAC statt GCA; Seit. 17. Zeil. 4 A + B statt A — B; S. 18. Z. 15. von unt. B + sin. A statt B — sin. A; S. 35. Z. 2. E statt F; S. 33. Z. 10. von unt. 29″ statt 59″; S. 41. Z. 21. AKF statt BKF; S. 44. Z. 30. OCH statt OCK; S. 69. Z. 10. v. unt. DF statt OF; S. 72. Z. 2. v. unt. EB statt FB; S. 89. Z. 9. v. unt. $2''\,2\frac{2}{3}''$ statt $2'' : 2\frac{2}{3}''$ und dergleichen mehr, so ist auch S. 46. Z. 7. die Summe der Logarithmen unrichtig.

Die Kupferstiche haben dadurch, daß sie kleiner und mehr zusammengedrängt worden sind, **nichts** verlohren. Ich habe mit Fleiß dafür gesorgt, daß diejenigen Figuren, welche von dem Herrn Verfasser beschriebene Maschinen und Instrumente ausdrükken, eben so **groß** und eben so **deutlich** als in dem Originale geblieben sind, ja

sich

sich wohl hin und wieder verbessert haben. So hat Fig. 22. und 96. ohnfehlbar gewonnen. Dafür sind andere, die bekanntere und leichtere Zeichnungen vorstellen, mehr zusammengezogen; aber dadurch im geringsten nicht undeutlich und unangenehm geworden.

Bey den Anmerkungen suchte ich vorzüglich das zu erklären, wobey sich der Herr Verfasser auf die Geometrie bezogen, und den ersten Theil allegirt hat. Doch habe ich auch manches andere deutlich zu machen gesucht, wovon ich glaubte, daß es den Anfängern zu dunkel seyn mögte, da sich der Herr Verfasser oft besonders kurz gefaßt, und mancher nicht gleich verständlichen Ausdrükke, um Weitschweifigkeit zu vermeiden, bedient hat, die ich nicht in dem Texte durch Umschreibung und eingeschaltete Parenthesen erläutern wollte, weil ich mir vorgesezt hatte, eine reine Uebersetzung des Scherfferschen Textes zu liefern. Vieles, was vielleicht hin und

wieder noch hätte erklärt werden können, bin ich übergangen, um durch die Anmerkungen das Buch nicht zu sehr zu vergrössern.

Vor Drukfehlern ist der Leser gesichert. Die Buchhandlung hat mir die Correktur der Bogen und Kupferstiche überlassen, und da ich vollkommen überzeugt bin, wie nachtheilig solche Fehler einer mathematischen Schrift sind, so habe ich sie mit allem Fleisse zu verhindern gesucht.

Gott lasse auch diese Arbeit Nutzen bringen.

Der Uebersezer.

Verzeichniß der Capitel und Abschnitte.

Das erste Capitel. Theorie der ebenen Trigonometrie = = = = §. 1

Der erste Abschnitt. Begriffe von der ebenen Trigonometrie, und den Theilen der Triangel 1

Der zweyte Abschn. Verschiedene Gleichungen und Formeln = = = 22

Der dritte Abschn. Von der Verfertigung der Tafeln und dem Gebrauche der Logarithmen 54

Der vierte Abschn. Von den Grundsätzen der Auflösung der Triangel = = 66

Der fünfte Abschn. Anwendung der erklärten Grundsätze auf die Auflösung der Triangel 80

Das zweyte Capitel. Anwendung der ebenen Trigonometrie = = = 91

Der erste Abschn. Von dem Aufnehmen der Grundlinien = = = 91

Der zweyte Abschn. Von den Instrumenten, mit welchen die Winkel aufgenommen zu werden pflegen = = = 103

Der dritte Abschn. Praktische Auflösung der Triangel = = = 126

Der

Der vierte Abschn. Von der Reduktion der Winkel zum Centro, und der Triangel auf die Horizontalfläche = = = §. 153

Der fünfte Abschn. Von der Wahl der Standörter, und Beurtheilung der Fehler in den Seiten, welche aus den Fehlern der Winkel entstehen = = = 179

Der sechste Abschn. Von der Libellation 202

Die erste Abtheilung. Von der kleinen Libellation = = = 204

Von den verschiedenen Wagen = 204

Von der Untersuchung der Wage = 208

Von dem Libelliren selbst = = 220

Die zweyte Abtheilung. Von der grossen Libellation = = = 227

Von den Wagen = = = 233

Von der Untersuchung der Wage = 237

Von der Libellation selbst = = 242

Der siebente Abschn. Von der Geodäsie oder Landtheilung = = = 246

Das dritte Capitel. Von einigen Anwendungen der Algeber und dem Gebrauche der Sinuße und Cosinuße in derselben = 251

Die

Die ebene Trigonometrie.

Das erste Capitel.

Theorie der ebenen Trigonometrie.

Erster Abschnitt.

Begriffe von der ebenen Trigonometrie und den Theilen der Triangel.

§. 1.

Die Trigonometrie lehrt uns die Theile der Triangel zu berechnen, und aus verschiedenen gegebenen andere zu finden. Die, von welcher wir jetzt handeln, betrachtet keine andere Triangel, als solche, die auf einer Ebene beschrieben und geradlinicht sind: denn die Trigonometrie, welche die auf einer Kugelfläche mit Cirkelbogen beschriebenen Triangel berechnen lehrt, und deswegen den Nahmen der Sphärischen Trigonometrie führt, verspahren wir für eine andere Abhandlung.

§. 2.

Jeder Triangel zeigt uns auſſer seinen Raum (dessen Inhalt durch die Lage und Grösse der Seiten bestimmt wird) sechs Theile, nemlich drey Seiten und eben so viel Winkel, welche durch das Zusammenstoſſen jeglicher zwey Seiten entstehen. In der Geometrie haben wir gesehen, daß die Grösse der Winkel, oder die Neigung der Seiten zu einander keinesweges von ihrer Länge abhange, sondern von der Zahl der Grade, welche auf einem jeden Bogen, der aus des Winkels Spitze zwischen den Schenkeln beschrieben werden kann, und einem Cirkelbogen ähnlich ist, enthalten sind. Indessen ob wir gleich auch bewiesen haben, daß in jedem Triangel die grösseren Seiten den grösseren Winkeln entgegen stehn, so richtet sich das Wachsen und Abnehmen beyder Stükke doch nicht nach einerley Gesezzen. Es sey (Fig. 1.) der Winkel ACB, den der Bogen AB, welcher mit einem Radius CA beschrieben ist, mißt, mit dem Winkel ECF, dessen Maaß der Bogen EF ist, und der mit dem Radius CE beschrieben ist, zu vergleichen. Man beschreibe mit dem Radius CE einen Bogen, der mit dem Bogen AB einerley Centrum hat und sezze den Winkel ECF = p, den Winkel BCA = P; so wird, weil die Radii gleich sind, der Bogen FE : Bog. ED = p : P. Weil nun die Bogen DE und AB einander ähnlich sind, so wird auch Bogen DE : Bog. AB = EC : BC, und in zusammengesezten Verhältnissen

alssen Bogen FE : Bog. AB = p × EC : P × BC; und durch Multiplikation der äusern und mittlern Glieder wird der Bogen FE × P × BC = dem Bog. AB × p × EC seyn. Es verhält sich daher p : P = der Bogen FE × BC : Bog. AB × EC oder p : P = $\frac{\text{Bog. FE}}{\text{EC}} : \frac{\text{Bog. AB}}{\text{BC}}$.

Aus dieser Gleichung folgt folgender Lehrsatz. Winkel stehn unter einander in einem aus dem ordentlichen Verhältnisse der Bogen, die sie messen, und dem umgekehrten Verhältnisse der Radiorum, die sie beschreiben, zusammengesezten Verhältnisse. Wenn man daher allgemein den Winkel P nennt, den Radius R, den Bogen A, so ist $P = \frac{A}{R}$. Da nun die Seiten des Triangels in diesen Ausdruk der Winkel nicht hineinkommen, ob die Winkel gleich einige Beziehung auf die Seiten haben, so sieht man deutlich, daß diese Grössen nicht aufgelöst, noch eine bestimmte Größe der Seiten aus der bestimmten Grösse der Winkel herausgebracht werden könne.

§. 3.

Damit man also eine wirkliche geometrische Proportion zur Erfindung des unbekannten Theils eines Triangels erhalten mögte, so hat man für die Winkel gewisse gerade Linien angestellt, die man Sinus, Cosinus,

Tangenten u. s. w. nennt, welche mit den Seiten des Triangels in einem wirklichen Verhältnisse stehn, wie wir in der Folge zeigen werden. Wer von der Trigonometrie Gebrauch machen will, muß die Bedeutungen dieser geraden Linien und ihre gegenseitigen Verhältnisse wohl inne haben, weil die ganze Kunst zulezt dahin hinausläuft, daß man sie mit den Seiten des Triangels in eine solche Gleichung bringt, daß das vierte Glied den verlangten Theil des Triangels giebt, oder doch wenigstens so etwas ist, woraus man ihn finden kann.

§. 4.

Man nehme einen Cirkel ABDE (Fig. 2.) an, der mit einem willkührlichen Radius CA beschrieben ist, und ziehe den Diameter BCE auf den Diameter ACD perpendikulair. Durch A ziehe man eine Tangente MAO von unbestimmter Länge, eben so eine andere dBX durch B. Man sezze den Anfang des Cirkels in A und nehme einen willkührlichen Bogen AF, so wird FB sein Complement zu einem Rektus (Winkel von 90°), und FBD sein Supplement. (oder Complement zu zwey Rektis), und FBDEA sein Complement zu vier Rektis seyn. Aus F lasse man auf den Radius AC ein Perpendikel FI fallen, so wird dasselbe der Sinus des Winkels FCA oder des Bogens AF heissen, und wenn FH mit AC parallel gezogen wird, so ist FH = IC und heißt Sinus Complementi

menti oder Cosinus des Bogens AF. Denn ein Sinus ist nichts anders, als ein vom Ende eines Bogens auf den Radius herabgelassenes Perpendikel, daher ist auch FH der Sinus des Bogens FB, welcher den Bogen AF zu einem Rektus ergänzt.

Wenn der Radius CF verlängert wird, bis er von der Tangente in G den Theil GA abschneidet, so heißt GA der Tangens des Winkels ACF oder des Bogens AF, und GC heißt desselben Winkels oder Bogens Sekans. Daher heißt auch Bf der Cotangens des Winkels ACF, so wie auch der Tangens des Complements FB, und Cf eben dieses Winkels oder Bogens AF Cosekans, oder Sekans des Complements BF.

§. 5.

Nachdem ich diese Benennungen gehörig angeführt habe, muß ich noch ausserdem bemerken, daß die Sinus der Bogen, wenn man den Anfang einmahl in A festgesezt hat, insgesammt, so viel ihrer in der ganzen Peripherie angenommen werden können, nach dem Diameter ACD betrachtet, und diejenigen, welche über dieser Linie stehen, für positive gehalten; die entgegengesetzten aber, und unter dem Diameter befindlichen, von uns negative werden genannt werden: daß hiernächst die Cosinus (oder Sinus der Complemente zum Rektus) alle in Rüksicht

auf den Diameter BCE betrachtet, und folglich die, welche gegen A, den Anfang des Cirkels liegen, für positive; die aber über BE hinaus gegen D befindlich sind, für negative gehalten werden.

Alle Tangenten erhält man ferner auf der Linie MAO. Die, welche sich auf AM über ACD befinden, sind positiv; welche aber auf AO unter ACD enthalten sind, sind negativ. Auf eben diese Art erhält man endlich die Cotangenten auf dBX. Die positiven sind auf Bd gegen den Anfang des Cirkels in Rükſicht auf den Diameter BE; die negativen auf BX.

Man kann hieraus abnehmen, daß in dem Punkte A, wo der Cirkel seinen Anfang nimt, und die Zahl der Grade o ist, auch der Sinus = o sey; bey Bogen von bestimmter Zahl von Graden aber, wie AF, hat der Sinus gleichfals eine bestimmte Grösse, wie FI. Wachsen die Bogen, als AK, so wächst auch der Sinus KL, bis der Bogen AB = 90° ist, dessen Sinus mit dem Radius BC von gleicher Grösse ist und daher Sinus totus genannt wird. Gehen wir über B fort, und bekommen den Bogen ABN, so ists einleuchtend, daß man auf AC kein Perpendikel fällen kann, ausser daß AC verlängert werde. Daher kann der Sinus dieses Bogens kein anderer seyn, als NQ. Gehen wir noch weiter fort, so wird der Si-

nus eines grössern Bogens ABS, ST werden; alle aber werden zwischen B und D stets abnehmen, bis man nach D, oder auf die Hälfte des Cirkels ABD kommen wird, dessen Sinus = o oder vielmehr = $\frac{1}{\infty}$ wird. Indes-

sen sind von A bis D alle Sinus über AD positiv. Nimt man aber den Bogen ABDY, so hat das Perpendikel Yg, das auf den verlängerten Radius AC gezogen ist, eine bestimmte Länge und befindet sich unter AD, folglich sind die Sinus eines Bogens, der über 180° ist, negativ. Man sieht aber, daß, wenn der Bogen ABDY bis E wächst, oder bis auf drey Quadranten oder 270° kommt, auch alsdann der negative Sinus wachse, bis er in E dem Radius EC gleich werde, über welchen hinaus er nicht mehr wachsen kann. Gehet man aber von E gegen A fort, als wollte man den Bogen ABDEa nehmen, so nehmen die Sinus wiederum ab, wie z. B. ah, ob sie gleich noch negativ bleiben, bis man nach A wieder zurükkommt und die ganze Peripherie des Cirkels nimt, wo der Sinus = $\frac{1}{\infty}$ wird.

Hieraus sieht man erstlich, daß die Sinus der Bogen von 0°, von 180° und 360° unendlich klein sind; zweytens, daß die Sinus von 0° bis 90° wachsen, hernach bis 180° abnehmen und positiv sind; von 180° hin-

gegen bis 270° wachsen, und von 270° bis 360° abnehmen und negativ sind; drittens, daß der Bogen von 90° die Grentze sey, wo die positiven Sinus ihre größte Höhe erreichen und weiter nicht grösser werden können, und der Bogen von 270° die andere Grentze sey, wo die negativen Sinus ihre größte Höhe erreichen.

§. 6.

Laßt uns nun auf eben diese Art den Fortgang der Cosinus durch die ganze Peripherie des Cirkels betrachten. Zuerst in dem Anfangspunkte des Cirkels A, wo der Bogen = 0° ist, ist AB sein Complement, oder der gantze Quadrant, dessen Sinus der Radius selbst ist (§ 5.), oder der Sinus totus AC. Wenn aber die Bogen AF, AK wachsen, so nehmen die Complemente FB und KB wie auch ihre Sinus FH (oder IC), hernach KP (oder LC), das heißt, die Cosinus der Bogen AF und AK beständig ab, bis in B, wo AB = 90°, und sein Complement = 0° wird, dessen Sinus oder der Cosinus des Bogens AB verschwindet. Gehet man über B nach N fort, und der Bogen ABN wird grösser als 90°, so muß er ein negatives Complement haben, indem der Bogen NB von ihm, wenn er einen rechten Winkel messen soll, weggenommen und nicht zu ihm gethan werden muß. Es liegt auch an und vor sich selbst der Sinus des Bogens BN auf der andern Seite des Diameters BE, da

er

er vorher gegen den Anfangspunkt A zu lag. Daher wird der Cosinus NP eines Bogens, der grösser ist als ein Quadrant, negativ von B an bis D, und wird immer grösser, indem der Bogen ABS wächst, dessen Cosinus SV ist, bis nach D. Es leuchtet deutlich hervor, daß, wenn aus diesem Punkte D auf den Radius BC ein Perpendikel gefället wird, selbiges DC oder dem Sinus Totus ganz gleich werde; aber negativ sey. Gehet man weiter bis nach Y fort, so nimmt des Bogens ABDY Cosinus YZ = gC wiederum ab, bleibt aber den ganzen Quadranten DYE hindurch negativ, in E wird er $= \frac{1}{\infty}$. Zwischen E und A, als wenn man sich etwa einen Bogen ABDEa denken wollte, wächst der Cosinus ab = hC wiederum von $\frac{1}{\infty}$ und kehrt zu seiner erstern Lage in Rüksicht des Diameters BE wieder zurük, das heißt, er wird positiv, bis er in A wiederum dem Sinus totus AC gleich wird. Hieraus kann man sehen, zum ersten, daß die Cosinus der Bogen von 0° bis 90° positiv sind, so wie die, deren Bogen grösser als 270° bis 360° auch positiv sind. Zum andern, daß die Cosinus der Bogen die grösser als 90°, und kleiner als 270° sind, negativ sind. Zum dritten, daß die Cosinus im ersten und dritten Quadranten von ihrer größten

Grösse, oder von der Grösse des Sinus totus bis auf $\frac{1}{\infty}$ abnehmen. Zum vierten, daß sie im zweyten und vierten Quadranten von $\frac{1}{\infty}$ bis zur Grösse des Sinus totus wachsen.

§. 7.

Was die Tangenten anbetrift, so siehet man aus gleichem Grunde ein, daß sie im Anfange des Cirkels A unendlich klein sind, darauf von A an stets wachsen, wie AG, AM, wenn nemlich die Bogen AF und AK wachsen. Ist man zu B (nemlich dem Quadranten) gekommen, so wird der Radius CB parallel mit AM, und man sieht, daß er nicht anders als in einer **unendlichen** Entfernung mit AM zusammenkommen kann, da denn der Winkel bey M in dem Triangel AMC **unendlich klein** wird. Aber so bald der Bogen AB grösser als ein Rektus genommen wird, so kann der Radius BC nicht mehr mit AM, sondern nur mit AO (nemlich auf der Seite, wo die Winkel kleiner als zwey Rekti sind, Geom. §. 147.) zusammenlaufen. Alsdenn werden die Tangenten dieser Ursach wegen **negativ** werden, so wie der Tangens des Bogens ABN, AO, des Bogens ABS aber, Ae seyn wird.

Hieraus folgt, daß man sagen könne, wenn der Bogen $AB = 90 + \frac{1}{\infty}$, so sey sein Tangens $= \infty$; aber

nega=

negativ, und daß daher von B bis zu D die negativen Tangenten abnehmen, bis sie daselbst $= \frac{1}{\infty}$ werden, indem der Radius CD mit AO in A zusammenkommt. Indem der Bogen über D wächst, wie z. B. ABDY, wird der Tangens Am von neuem positiv, und wächst von $\frac{1}{\infty}$ bis ∞, wenn der Bogen nach E kommt. Nimt man endlich einen Bogen über drey Quadranten an, als ABDEa, so beschreibt der Radius Ca einen negativen Tangens AO, welcher aus E von einer unendlich grosen Grösse bis nach A zu einer unendlich kleinen abnimt.

Hieraus kann man leicht abnehmen, daß erstlich die Tangenten wechselsweise nach den Quadranten ihr Zeichen ändern; daß sie in dem ersten und dritten positiv; in dem zweyten und vierten negativ sind. Zweytens, daß sie, so lange sie positiv sind, von $\frac{1}{\infty}$ bis ∞ wachsen, bis sie ihr Zeichen ändern; wenn sie aber negativ sind, von ∞ bis $\frac{1}{\infty}$ abnehmen, wo sie wiederum das entgegenstehende Zeichen bekommen.

§. 8.

Wie die Tangenten der Complemente oder die Cotangenten verändert werden, kann man aus dieser Betrachtung ohne Schwierigkeit abnehmen. Im Anfange

des

des Cirkels A ist das Complement AB = 90°, der Cotangens des Bogens A (welcher = 0° ist), den man auf Bd erhält, ist folglich ∞, weil man sich CA nicht anders denken kann, als daß es mit jener Parallele in einer unendlichen Entfernung zusammenkommt. Kommt aber der Bogen AF zu einer bestimmten Grösse, so nimt der Cotangens Bf ab, und um desto mehr, je näher man nach B rükt, wo der Cotangens des Bogens AB, der = 90° ist, = $\frac{1}{\infty}$ wird. Wird der Bogen gröfser, als ABN, so wird BR der Cotangens auf der entgegengesetzten Seite in Rüksicht des Diameters BE, und daher negativ, er wächst daher von $\frac{1}{\infty}$ in B, bis er in D ∞ wird, wo der Radius CD mit BX parallel wird. Wächst aber der Bogen ABDY über D, so schneidet der Radius YC den Tangens auf B wieder um auf der andern Seite, als in d, daß also die Cotangenten in dem dritten Quadranten positiv werden, und von ∞ abnehmen, bis sie $\frac{1}{\infty}$ werden, wenn der dritte Quadrant ABDE geendigt ist. Ueber E, als z. B. in a, schneidet der verlängerte Radius aC, BX in R, die Cotangenten werden wieder negativ, und müssen durch den vierten Quadranten wachsen, bis sie = ∞ werden, wenn man nach A zurükkommt. Hieraus folgt erstlich,

die

die **Cotangenten** verändern eben so bey jedem einzelnen Quadranten ihre Zeichen, als die Tangenten; sie sind im ersten und dritten **positiv**, im andern und vierten **negativ**. **Zweytens**, so lange sie positiv sind, nehmen sie von ∞ bis $\frac{1}{\infty}$ ab; aber wenn sie negativ sind, wachsen sie von $\frac{1}{\infty}$ bis ∞, je nachdem die Bogen grösser werden, bis sie ihr Zeichen verändern.

§. 9.

Aus diesen Erklärungen fliessen folgende **Zusätze**. **Erster Zusatz: Der Sinus eines Winkels ist die halbe Sehne des doppelt so grossen Bogens, als der, der den Winkel mißt.** Von spitzigen Winkeln siehet man dieses leicht, als z. B. beym Winkel FCA, wo es aus dem 74. §. der Geometrie einleuchtet. Denn wenn FI verlängert würde, so würde sie in dem Bogen AE auf einen Punkt stossen, der eben so weit von A entfernt wäre, als F. Aber auch bey stumpfen Winkeln ist dies nicht weniger deutlich, als z. B. bey ACN, weil die verlängerte Linie NQ von AED gegen D einen Bogen abschneidet, der dem Bogen ABN gleich ist.

§. 10.

Zweyter Zusatz. Der stumpfe Winkel ACN, der um so viel grösser ist als ein rechter, als der spitzige ACK,

an ihm fehlen läßt, (wenn nemlich der stumpfe nicht über 180° ist) hat einerley positiven Sinus NQ = KL mit ihm. Die Cosinus NP und KP sind zwar an Grösse einander gleich, wie auch die Tangenten AM und AO, auch die Cotangenten RB und nB; aber sie haben verschiedene Zeichen. Weil man auch in den Tafeln (wovon wir hernach reden werden) keine Sinus und Cosinus für stumpfe Winkel hat, so muß man, um sie zu finden, den stumpfen Winkel von 180° abziehen, und vom übrigbleibenden den Sinus nehmen. Denn wenn man den Bogen ABN von ABD wegnimt, bleibt ND = AK übrig.

§. 11.

Dritter Zusatz. Keines Winkels Sinus kann gröfser als der Radius oder Sinus totus seyn.

§. 12.

Vierter Zusatz. Wenn ich in einem jeden rechtwinkelichten Triangel die Hypotenuse für den Sinus totus oder für den Radius annehme, so ist die eine Cathete, als FI, der Sinus des entgegenstehenden Winkels, die andere aber, als CI, desselben Winkels Cosinus.

§. 13.

Fünfter Zusatz. Wenn der Winkel FCA = 45° ist, so wird der Tangens AG dem Radius AC gleich seyn, denn es ist ein gleichschenklichter Triangel.

§. 14.

§. 14.

Sechster Zusatz. Die Verhältnisse der Sinus aller halben Winkel am Centro regulairer Polygone, die man auf geometrische Art beschreiben kann, zum Radius, können akkurat ausgedrukt werden, wenigstens durch Wurzelausdrükke. Dies leuchtet aus der VII. Aufgabe im 4ten Cap. der Geom. hervor. So, wenn (Fig. 3.) $FCA = 45°$, ist $FI = IC$, und FI verhält sich zu $FC = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zu 1. Wenn eben dieser Winkel $= 30°$ angenommen wird, so ist $FI = \frac{1}{2}FC$, und $IC : AC = \sqrt{3} : 2$ u. s. w.

§. 15.

Siebenter Zusatz. Wenn zu einem Winkel FCA (Fig. 3.), der kleiner als ein rechter ist, ein Quadrant FBN hinzugefügt wird, so wird der Sinus des vergrösserten Winkels NQ dem Cosinus des unvergrösserten Winkels gleich, der Cosinus des vergrösserten negativ und dem Sinus des unvergrösserten an Grösse gleich. Eben so wird der Tangens des vermehrten Winkels negativ, und an Grösse dem Cotangenten des unvermehrten gleich; der Cotangens des vermehrten aber wird gleich dem Tangenten des unvermehrten Winkels, ausser daß er negativ ist.

Der Grund hiervon ist leicht einzusehen. Denn weil FCN der Voraussetzung nach ein Rektus ist, so machen

auch

auch die Winkel FCA und NCQ zusamm einen Rektus aus, indem alle drey zwey Rektos in sich enthalten. Daher wird der Winkel NCQ das Complement des Winkels FCA zu einem Rektus; aber auch CFI ergänzt eben diesen Winkel FCA zu einem Rektus, daher muß CFI = seyn NCQ. Weil auch bey Q und I Rekti sind, und FC = CN ist, so sind beyde Triangel einander gleich und ähnlich, und ebendeswegen ist NQ = IC, CQ = NP = FI. Auf eben die Art ists klar, daß NCQ + BCN = 90° sind = BCN + BCF, folglich, wenn man gleiches von gleichem abzieht, NCQ = BCF = ACO sey. Weil nun in den Triangeln ACO und BCf ausserdem die Winkel bey A und B Rekti, und die Seiten AC und BC einander gleich sind, so ist auch OA = Bf: nun ist aber AO der Tangens des Winkels ACN, und ist daher Bf gleich, oder dem Cotangenten des Winkels FCA. Daher ist endlich auch BR = GA, oder der Cotangens von ABN dem Tangens von ACF.

§. 16.

Achter Zusatz. Wenn man zu dem spitzigen Winkel FCA einen halben Cirkel FBY hinzufügt, so bleiben die Sinus und Cosinus des auf diese Art vergrösserten Winkels ebendieselben in Ansehung der Grösse, doch verändern sie das Zeichen; aber der Tangens und Cotangens verändert nicht einmahl dasselbe. Denn der Winkel ABDY hat den

Sinus

Sinus Yg, den Cosinus gC; den Tangens AG und Cotangens Bf; daß Yg = FI, und gC = IC, erhellet aus der Congruenz der Triangel IFC und CYg.

§. 17.

Neunter Zusatz. Wird der Winkel ACF um den ganzen Cirkel vermehrt, so bleibt eben der Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens. Denn da der ganze Cirkel eben die Linien hat, die der Bogen, der = 0° ist, hat, wie aus §. 5. 6. 7. 8. erhellet, so muß man nur auf den Bogen AF sehen, und es bleibt daher alles ohne irgend eine Veränderung. Ja man kann zwey, drey, vier und mehrere ganze Peripherien hinzuthun, wiewohl diese Art der Vermehrung in der ebenen Trigonometrie nicht üblich ist.

§. 18.

Zehnter Zusatz. Der Sinus eines halben Winkels FCA (Fig. 4.) ist dem Cosinus des halben Supplements und der Cosinus von halb FCA gleich dem Sinus des halben Supplements; endlich der Tangens von dem halben FCA dem Cotangenten des halben Supplements. Gesezt, FCE sey = $\frac{1}{2}$FCA, und FCG = $\frac{1}{2}$FCD. Da FCA + FCD = ist 180°, so wird $\frac{1}{2}$FCA + $\frac{1}{2}$FCD = seyn FCE + FCG = 90°. Daher ist HCG = IFC, indem jeder von ihnen den Winkel FCE zu einem Rektus ergänzet, und daher sind die Triangel IFC und HCG ein-

ander gleich und ähnlich, wegen der auch gleichen Seiten CF und CG, und daher CH = FI und GH = IC. Und weil man annimmt, daß ACF ein positiver Winkel und grösser als Nichts sey, so ist FCD stets geringer als 2 Rekti, und folglich seine Hälfte FCG ein spitziger Winkel. Es kömmt daher einem jedem Winkel HCG und HGC ein positiver Tangens, Sinus und Cosinus zu. Unsere Behauptung ergiebt sich hieraus.

§. 19.

Erklärung. Der Sinus versus des spitzigen Winkels FCA (Fig. 2.) ist AI, die Differenz zwischen dem Sinus totus AC und Cosinus IC; Cosinus versus ist hingegen HB, oder Sinus versus des Complements FB. Des stumpfen Winkels ACN Sinus versus ist AQ, die Summe des Sinus totus und desselben Winkels Cosinus PN oder CQ; aber positiv genommen.

§. 20.

Zusatz. Wird der Cosinus gegeben, so erhält man auch den Sinus versus, und umgekehrt. Weil auch, wenn der Sinus FI gegeben wird, der Cosinus IC = $\sqrt{FC^2 - IF^2}$ gegeben wird, und wenn der Cosinus gegeben wird, auch der Sinus IF = $\sqrt{FC^2 - IC^2}$ gegeben wird: so wird auch, indem der Sinus versus gegeben wird, der Sinus und Cosinus mit gegeben; wird aber

der

der Sinus gegeben, so wird auch der Cosinus und Sinus versus gegeben; oder wenn der Cosinus gegeben wird, wird der Sinus und Sinus versus gegeben. Auf eben die Art erhält man den Sekans, wenn der Tangens AG gegeben wird, weil der Radius stets gegeben wird und AG, oder der Tangens $= \sqrt{CG^2 - AC^2}$, CG oder der Sekans $= \sqrt{AG^2 + AC^2}$ ist. Ferner ist das Verhältniß da, GC : FC = AG : FI, oder Sekans zu Radius, wie Tangens zu Sinus. Wenn folglich der Tangens gegeben ist, wird auch der Sinus gegeben.

§. 21.

Anmerk. Für die Wörter Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens, Sinus versus, Cosinus versus, Sekans, Cosekans werden wir in der Folge bey den Gleichungen entweder die Anfangsbuchstaben, s., c., t., cot., s v., cos. v., sec., cosec., oder auch die halben Wörter, sin., cos., tang., cotang., sin. v., cos. v., sec., cosec. sezzen. Für Sinus totus oder Radius werden wir R oder 1 schreiben.

Zweyter Abschnitt.

Verschiedene Gleichungen und Formeln.

§. 22.

Der Gebrauch der Formeln, die wir iezt mittheilen, findet nicht allein bey algebraischen Untersuchungen, son-

dern auch bey der Verfertigung der Sinustafeln statt, damit man wisse, was, und an welche Stelle man es sezzen, was man finden könne, und was gegeben seyn müsse. Wir wollen, wenn von einem Winkel die Rede ist, ihn A, und wenn von zweyen geredet wird, den andern B nennen. Das Quadrat des Sinus oder Cosinus wollen wir durch sin.^{2} oder cos.^{2} ausdrukken, und wenn wir alles werden gezeigt haben, die in Ordnung gebrachten Formeln selbst hinzufügen.

§. 23.

Aus dem 10. Zusatze (§. 18.) des vorigen Abschn. siehet man, daß der Sinus von $\frac{1}{2}$A = sey dem Cosinus von $\frac{1}{2}$ Supplement A; daß der Cosinus $\frac{1}{2}$A = sey dem Sinus von $\frac{1}{2}$ Supplement A; daß der Tangens von $\frac{1}{2}$A = sey dem Cotangens von $\frac{1}{2}$ Supplement A; daß der Cotangens von $\frac{1}{2}$ A = sey dem Tangens von $\frac{1}{2}$ Supplement A. Dies dürfen wir nicht noch einmahl beweisen.

§. 24.

Man sezze (Fig. 3.) den Winkel FCA = A, so wird Erstlich, AC : AG = CI : IF, das heißt, R : tang. A = cos. A : sin. A, und daher sin. A seyn = $\frac{\text{cos. A} \times \text{tang. A}}{\text{R}}$,

oder wenn R = 1 ist, so ist sin. A = cos. A × tang. A.

Zwey-

Zweytens. Die Triangel fBC, FHC, die wegen der Parallellinien Bf und HF einander ähnlich sind, geben das Verhältniß, Bf : HF = BC : HC oder FI, das heißt, cot. A : col. A = R : sin. A. Setze ich nun R = 1, so wird $\sin. A = \frac{\text{col. A}}{\text{cot. A}}$.

Drittens. Weil GA und FI Parallellinien sind, so wird GC : GA = FC : FI, oder sec. A : tang. A = R : sin. A. Ist daher R = 1, so wird seyn $\sin. A = \frac{\text{tang. A}}{\text{sec. A}}$.

§. 25.

Weil die Triangel fBC und FHC einander ähnlich sind, so folgt, BC : Bf = CH (oder FI) : FH, oder R (= 1) : cot. A = sin. A : col. A. Folglich wenn R = 1 ist, ist col. A = sin. A × cot. A. Ingleichen die Triangel GAC und FIC geben die Gleichung, GA : AC = FI : IC, oder tang. A : R = sin. A : col. A, folglich ist col. A, wenn ich R = 1 setze, $= \frac{\text{sin. A}}{\text{tang. A}}$.

Man nehme einen Winkel FCA (Fig. 5.) und nenne ihn A, verlängere seinen Sinus FI, daß AF = AG werde, so wird FG = 2FI werden, und FH, das auf CG perpendikulair steht, = sin. 2A seyn. Man siehet nun Erstlich, daß der Triangel CIG gleich und ähnlich sey

dem Triangel FIC, zweytens, daß die Triangel FGH und CIG einander ähnlich sind, wegen des gemeinschaftlichen Winkels in G, und der Rechten bey H und I. Daher kann man sagen, FG : FH = CG : CI, oder, 2 Sin. A : sin. 2A, = R : cos. A, ist nun R = 1, so ist cos. A = $\frac{\text{sin. 2 A}}{\text{2 sin. A}}$. Wäre 2A > 90°, so bleibt demohnerachtet die Gleichung doch. Denn es sey fCA = A, fi = sin. A, fg = 2 sin. A und gh = sin. 2A, so wird noch fg : gh = fC : Ci, da die Triangel fCi, fgh, bey i und h rechtwinklicht sind, und einen gemeinschaftlichen Winkel f haben.

Man nehme in eben dieser Figur den Winkel FCG = A, FH = sin. A an, mache FCA = $\frac{1}{2}$FCG = $\frac{1}{2}$A, so wird FI = sin. $\frac{1}{2}$ A, FG = 2 sin. $\frac{1}{2}$A, HC = cos. A.

Aus der Aehnlichkeit der Triangel, FGH und CGI, die wir schon bewiesen haben, folgt die Gleichung CG : GI = FG : GH, das ist eben so viel als R (= 1) : sin. $\frac{1}{2}$A = 2 sin. $\frac{1}{2}$A : GH, oder GH = 2 sin.^{2} $\frac{1}{2}$A. Wird nun GH von CG = R abgezogen, so bleibt HC der Cosinus von A übrig, welcher ist = R — 2 sin.^{2} $\frac{1}{2}$ A.

§. 26.

In der 3. Figur verhält sich CI : IF = CA : AG, das ist, wenn ich FCA = A annehme, cos. A : sin. A = R (= 1) : tang. A. Also tang. A = $\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}}$.

Weil

Weil auch wegen der Parallellinien Bf und AC, ingleichen BC und AG die Triangel fBC und CAG einander ähnlich sind, so verhält sich auch fB : BC = AC : AG, oder cot. A : R (= 1) = R : tang. A, folglich tang. A $= \frac{R^2}{\text{cot. A}} = \frac{1}{\text{cot. A}}$. Diese Formel zeigt zugleich an, daß die Tangenten sich in einem umgekehrten Verhältnisse mit den Cotangenten befinden.

Endlich ist in dieser Figur das Verhältniß noch, FC : FI = GC : GA, das ist, R (= 1) : sin. A = sec. A : tang. A, und daher tang. A = sin. A × sec. A.

§. 27.

Im vorhergehenden §. sahen wir, daß tang. A = $\frac{R^2}{\text{cot. A}}$; deswegen wird auch cot. A seyn = $\frac{R^2}{\text{tang. A}}$. Ingleichen war in dem 25. §. cos. A = sin. A × cot. A, daher ist $\frac{\text{cos. A}}{\text{sin. A}}$ = cot. A. Endlich weil tang. A = ist $\frac{R^2}{\text{cot. A}}$, so wird tang. A × cot. A = R^2.

§. 28.

Wir finden im 25. §., daß cos. A = $\frac{\text{sin. 2 A}}{2 \text{ sin. A}}$; wenn wir beyde Grössen auf den Sinus A (Fig. 5.) ziehen, so wird $\frac{1}{2}$ sin. 2A = sin. A. × cos. A. Ausserdem

haben wir eben daselbst gesehen, daß col. A $= \frac{\text{sin. A}}{\text{tang. A}}$ $=$ sin. A $\times$ cot. A. Wenn man beyde Werthe statt des cos. A hinsezt, so erhält man $\frac{1}{2}$ sin. 2A $= \frac{\text{sin}^2\text{ A}}{\text{tang. A}}$ $=$ sin.^{2} A $\times$ cot. A.

§. 29.

Es sey (Fig. 6.) FCA $=$ A, man ziehe die Linie FD, so wird der Winkel an der Peripherie FDA $=$ seyn $\frac{1}{2}$ FCA (da beyde auf einem Bogen stehen), und deswegen HD $=$ cos. $\frac{1}{2}$ A, (wenn nemlich CH auf der Sehne FD perpendikulair stehet) und FD $=$ 2 cos. $\frac{1}{2}$ A, FI $=$ sin. A, CK welches parallel ist mit FI, $=$ tang. $\frac{1}{2}$ A. Wegen der Aehnlichkeit der Triangel CHD und FID folgt, CD : HD $=$ FD : ID, oder R ($=$1) : cos. $\frac{1}{2}$ A $=$ 2 cos. $\frac{1}{2}$ A : ID, folglich ID $=$ 2 cos.^{2} $\frac{1}{2}$ A. Es ist aber ID $=$ CD + IC $=$ R + cos. A, folglich R + cos. A $=$ 2 cos.^{2} $\frac{1}{2}$ A. Nimmt man an, daß der Winkel fCA $=$ A ein stumpfer Winkel gewesen sey, so sind nichts destoweniger die Triangel ifD und ChD einander ähnlich, und CD : hD $=$ fD : iD, oder R : cos. $\frac{1}{2}$ A $=$ 2 cos. $\frac{1}{2}$ A : iD und iD $=$ 2 cos.^{2} $\frac{1}{2}$ A; hier aber ist iD $=$ CD — Ci $=$ R — cos. A. (§. 10.)

Ausserdem ist in den Triangeln DCK und DIF das Verhältniß, CK : FI $=$ CD : DI, oder tang. $\frac{1}{2}$ A : sin. A $=$ R

$= R : R + \text{col. } A$, daher ist $R + \text{col. } A = \frac{\text{sin. } A}{\text{tang. } \frac{1}{2} A}$;

Wenn ACf grösser als 90° gewesen wäre und hiesse A, so wird doch Ck : fi = CD : iD, das ist, tang. $\frac{1}{2}$ A : sin. A = R : R — col. A. Folglich R — col. A = $\frac{\text{sin. } A}{\text{tang. } \frac{1}{2} A}$.

§. 30.

Im 25. §. sahen wir, daß col. A = R — 2 sin.^{2} $\frac{1}{2}$ A sey, daher 2 sin.^{2} $\frac{1}{2}$ A = R — col. A. Hiernächst da CK (Fig. 6.) = tang. $\frac{1}{2}$ A, und DC : DA = CK : AG, oder 1 : 2 = tang. $\frac{1}{2}$ A : AG, so wird AG = 2 tang. $\frac{1}{2}$ A seyn. Ausser diesem sind die Triangel AFI und AFD, (wegen des rechten Winkels AFD, der auf einem halben Cirkel stehet, und IF das auf AD perpendikulair steht) und GAD einander ähnlich. Daher FI : AI = AD : AG, oder sin. A : R — col. A = 2R : 2 tang. $\frac{1}{2}$ A, welche Vergleichung zeigt, daß R — col. A = $\frac{2 \text{ tang. } \frac{1}{2} A \times \text{sin. } A}{2R}$ = sin. A × tang. $\frac{1}{2}$ A.

§. 31.

In eben der 6ten Figur verhält sich DI : IF = IF : IA, folglich verhält sich DI : IA = DI^2 : FI^2, eben so CD^2 : CK^2 = R^2 : tang.^{2} $\frac{1}{2}$ A. DI ist aber = R + col. A, und IA = R — col. A. Daher folgt, R + col. A. : R — col. A. = R^2 (= 1) : tang.^{2} $\frac{1}{2}$ A. Dieser ist daher =

$\frac{R - \text{cof. } A}{R + \text{cof. } A}$. Ferner (§. 26.) tang. $\frac{1}{2}$ A $= \frac{1}{\text{cot. } \frac{1}{2} A}$,

folglich tang.^{2} $\frac{1}{2}$ A $= \frac{1}{\text{cot.}^2 \frac{1}{2} A}$; deswegen ist auch

$\frac{R - \text{cof. } A}{R + \text{cof. } A} = \frac{1}{\text{cot.}^2 \frac{1}{2} A}$ und $\frac{R + \text{cof. } A}{R - \text{cof. } A} = \text{cot.}^2 \frac{1}{2} A$.

§. 32.

Es sey der Winkel GCA (Fig 7. nr. 1.) kleiner als 45°, der R = AC, der Tangens = AG. Man beschreibe aus dem Centro A, mit dem Radius AG einen Cirkel DGE; so wird DC = AG + AC = R + tang. A, und EC = AC — AG = R — tang. A seyn. DGE ist ausserdem = 90° und GEA = 45°, und wenn CBH mit GE parallel gezogen wird, so wird auch DHC = 90° und HCA = 45°, eben so HC = HD und BC = AC = BK (§. 13.) = tang. 45°, und BI = tang. ICB seyn. Es ist aber der Winkel ICB = EGC, und weil GEA = 45° ist, und EGC in Rükſicht auf ECI äusserlich ist, so ist BI = tang. (45° — A). Es verhält sich EC : CD = HG : HD = BI : BK (oder BC, oder AC), deswegen auch EC : CD = BI : AC, oder R — tang. A : R + tang. A = tang. (45° — A) : R (= 1) und daher

$\frac{R + \text{tang. } A}{R - \text{tang. } A} = \frac{R}{\text{tang. } (45° - A)} = \frac{1}{\text{tang. } (45° - A)}$.

Der Cotangens des Bogens von 45° — A, ist der Tangens

gens des Bogens $45° + A$, denn addirt man sie zusammen, so sind sie gleich $90°$; ausserdem befinden sich die Tangenten in dem umgekehrten Verhältniß der Cotangenten, und deswegen $\frac{1}{\text{tang.}(45° - A)} = \text{tang.}(45° + A)$, und folglich $\frac{R + \text{tang. } A}{R - \text{tang. } A} = \text{tang. } (45° + A.)$

Es mag hiernächst einmahl der Winkel GCA (Fig. 7. nr. 2.) über $45°$ seyn. Wenn wiederum aus dem Centro A mit dem Radius $AG = \text{tang. } A$ ein Cirkel DGE beschrieben, GE und mit ihr HC parallel gezogen wird, eben so durch B mit DG die Linie KBI parallel, so ists augenscheinlich, CE werde seyn $=$ tang. $A - R$, CD $=$ tang. $A + R$, BK $=$ tang. $45° =$ AC, BI $=$ tang. $(A - 45°)$, und es verhält sich nun CE : CD $=$ GH : HD $=$ BI : KB oder AC, das ist, tang. $A - R$: tang. $A + R =$ tang. $(A - 45°)$: R, daß daher $\frac{\text{tang. } A + R}{\text{tang. } A - R} = \frac{1}{\text{tang. } (A - 45°)}$.

§. 33.

Da wir (§. 26.) gesehen haben, daß tang. $A = \frac{\text{sin. } A}{\text{cos. } A}$ sey und, wenn man A kleiner als $45°$ annimt, $\frac{R + \text{tang. } A}{R - \text{tang. } A} = \frac{1}{\text{tang. } (45° - A)} = \text{tang. } (A + 45°)$ ist,

ist, so wird, wenn man für tang. A $\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}}$ sezzet, alsdann

$$\frac{R + \frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}}}{R - \frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}}} = \frac{R \times \text{cos. A} + \text{sin. A}}{R \times \text{cos. A} - \text{sin. A}} = (\text{weil } R = 1 \text{ ist})$$

$$\frac{\text{cos. A} + \text{sin. A}}{\text{cos. A} - \text{sin. A}} = \frac{1}{\text{tang. } (45° - A)} \text{ oder } \frac{\text{cos. A} - \text{sin. A}}{\text{cos. A} + \text{sin. A}}$$

$= \text{tang. } (45° - A)$.

Wenn A grösser als 45° ist, so wird die Formel $\frac{\text{tang. A} + R}{\text{tang A} - R} = \frac{1}{\text{tang. } (A - 45°)}$ auf eben die Art durch dieselbige Substitution $\frac{\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}} + R}{\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}} - R} = \frac{\text{sin. A} + \text{cos. A}}{\text{sin. A} - \text{cos. A}}$

$= \frac{1}{\text{tang. } (A - 45°)}$, oder $\frac{\text{sin. A} - \text{cos. A}}{\text{sin. A} + \text{cos. A}} =$

$\text{tang. } (A - 45°)$.

§. 34.

Wenn A grösser als 90° ist, so ist nach §. 29. $R + \text{cos. A} = \frac{\text{sin. A}}{\text{tang. } \frac{1}{2} A}$; daher ist $\frac{\text{sin. A}}{R + \text{cos. A}} = \text{tang. } \frac{1}{2} A$. Und aus §. 30. wissen wir, $R - \text{cos. A} = \text{sin. A} \times \text{tang. } \frac{1}{2} A$, daher ist auch $\frac{R - \text{cos. A}}{\text{sin. A}} = \text{tang. } \frac{1}{2} A$.

§. 35.

§. 35.

Es sey (Fig. 8.) der Winkel DCA = A, DCB = B. Es sey gegeben DF = sin. A; FC = cos. A, BI = sin. B, IC = cos. B, man soll BH = sin. (A + B) finden, und HC = cos. (A + B). Man ziehe IG mit DF, und IO *mit* AC parallel, so werden die Triangel DCF und ICG einander ähnlich seyn, ingleichen BIO, IOR, RCH, DCF. Daher verhält sich DC : IC = DF : IG = OH; das ist R (= 1) : cos. B = sin. A : OH, und also OH = sin. A × cos. B. Ferner, DC : FC = BI : BO, oder R (= 1) : cos. A = sin. B : OB, daher OB = sin. B × cos. A. Es ist aber OH + OB = BH = sin. (A + B) = sin. A × cos. B + sin. B × cos. A. Welches das Eine war.

Ausserdem ist DC : FC = IC : GC, oder R (= 1): cos. A = cos. B : GC, daher GC = cos. A × cos. B. Ingleichen DC : DF = IB : IO, oder R (= 1) sin. A = sin. B : IO = sin. A × sin. B. Nun ist IO = GH, und GC — GH = HC = cos. (A + B). Folglich cos. (A + B) = cos. A × cos. B — sin. A × sin. B. Welches das andere war.

§. 36.

Wenn (Fig. 9.) DF = sin. DCA = sin. A gegeben wird, ingleichen FC = cos. A, BI = sin. BCA = sin. B, IC = cos. B, wie findet man sin. BCD, hier = HB =

sin.

sin. (A — B), und HC = cos. (A — B)? Es werde IG mit BH parallel gezogen, ingleichen BO mit DC, so wird, weil die Triangel IGC und DFC rechtwinklichte sind und in C einen gemeinschaftlichen Winkel haben, sich verhalten DC : DF = IC : IG, oder R (= 1) : sin. A = cos. B : IG und IG also = sin. A × cos. B. Ausserdem sind die rechtwinklichten Triangel BOI und DFC einander ähnlich, weil BI mit DF und BO mit DC parallel ist, deswegen verhält sich DC : FC = BI : IO oder R : cos. A = sin. B : IO und daher IO = cos. A × sin. B. Nun ist OG = IG — IO = BH = sin. (A — B), daher sin. (A — B) = sin. A × cos. B — sin. B × cos. A. **Welches das eine war.**

In eben den Triangeln ist DC : FC = IC : GC, das ist, R (= 1) : cos. A = cos. B : GC und daher GC = cos. A × cos. B. Ferner DC : DF = BI : BO, oder R (= 1) : sin. A = sin. B : BO, daher BO = sin. A × sin. B. Es ist aber CG + BO (= CG + GH) = CH = cos. DCB = cos. (A — B), folglich cos. (A — B) = cos. A × cos. B + sin. A × sin. B, **welches das andere war.**

§. 37.

Oben im 35. §. fanden wir, daß sin. (A + B) = sin. A × cos. B + sin. B × cos. A, und da nun im vorhergehenden §. sin. (A — B) = ist sin. A × cos. B —

sin.

sin. B × cos. A; so wird daher sin. (A + B) : sin. A — B = sin. A × cos. B + sin. B × cos. A : sin. A × cos. B — sin. B × cos. A. Man dividire das zweyte Verhältniß durch cos. A × cos. B, so wird man erhalten sin. (A + B) : sin. (A — B) = tang. A + tang. B. : tang. A — tang. B. Daher $\frac{\text{sin. (A + B)}}{\text{sin. (A — B)}} = \frac{\text{tang. A + tang. B}}{\text{tang. A — tang. B}}$.

§. 38.

Aus den eben angeführten §§. folgt, daß cos. (A + B) = cos. A × cos. B — sin. A × sin. B, und cos. (A — B) = cos. A × cos. B + sin. A × sin. B, und derowegen cos. (A + B) : cos. (A — B) = cos. A × cos. B — sin. A × sin. B : cos. A × cos. B + sin. A × sin. B. Man dividire das zweyte Verhältniß durch sin. A × cos. B, so wird cos. (A + B) : cos. (A — B) = $\frac{\text{cos. A}}{\text{sin. A}} - \frac{\text{sin. B}}{\text{cos. B}}$: $\frac{\text{cos. A}}{\text{sin. A}} + \frac{\text{sin. B}}{\text{cos. B}}$; aber (§. 26.) es ist $\frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$ = tang. und (§. 27.) $\frac{\text{cos.}}{\text{sin.}}$ = cotang; daher cos. (A + B) : cos. (A — B)

= cot.

$= \cot. A - \tang. B : \cot. A + \tang. B$, und daher

$$\frac{\cos. A + B}{\cos. A - B} = \frac{\text{cotang. } A - \tang. B}{\text{cotang. } A + \tang. B}.$$

Wenn man das zweyte Verhältniß eben dieser Gleichung durch $\cos. A \times \sin. B$ dividirt, so verhält sich $\cos. (A + B) : \cos. (A - B) = \frac{\cos. B}{\sin. B} - \frac{\sin. A}{\cos. A} : \frac{\cos. B}{\sin. B} + \frac{\sin. A}{\cos. A}$ und wenn man die vorherigen Subſtitutionen wieder anbringt, so iſt $\frac{\cos. (A + B)}{\cos. (A - B)} = \frac{\text{cotang. } B - \tang. A}{\text{cotang. } B + \tang. A}$.

§. 39.

Es sey (Fig. 10.) der Winkel $DCK = A$, und $RCK = B$, so wird $DR = A - B$ und $RP = DP = \frac{1}{2} DR = \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B$, $DE = \sin. A$, $RF = \sin. B$ seyn. Man ziehe CX auf die Sehne RH, (welche mit dem Diameter VK parallel geht) perpendikulair, so wird $XI = CE = \cos. A$ seyn; $XR = CF = \cos. B$ seyn, $RH = 2 \cos. B$, $RI = EF = \cos. B - \cos. A$ seyn, $ID = DE - RF = \sin. A - \sin. B$ seyn. Man verlängere DE nach G, so wird $KCG = A$, $RKG = A + B$, $IG = \sin. A + \sin. B$ seyn. Man theile RKG in S in zwey Theile und ziehe die Radios CS, CP und den Tangens auf R, so wird $RM = \tang. (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)$, $RL = \tang. (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$, $RQ = DQ = \sin. (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$, $ST = \sin. (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)$, $CT = \cos. (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)$, $QC = \cos. (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)$.

Auſſer-

Ausserdem ist HV = RK = B, und GV = VGK — GK = 180° — A, und HVG = 180° — A — B, es ist aber A — B = DR, also HVG = 180° — DR, das ist, HVG ist das Supplement des Bogens DR. Oben (§. 18.) sahen wir, daß der Cosinus des halben Winkels dem Sinus des halben Supplements gleich sey, deswegen wird QC seyn = cos. ($\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B) = sin. $\frac{1}{2}$HVG; es ist aber HG die Sehne des Bogens HVG = 2 sin. $\frac{1}{2}$HVG; daher wird HG = seyn 2 cos. ($\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B).

Die Triangel CST und GHI sind in I und T rechtwinklicht, und haben die gleichen Winkel SCT und GHI, weil jener auf dem Bogen RS = $\frac{1}{2}$RG stehet, dieser aber auf dem Bogen RG, und ausserdem ein Winkel an der Peripherie, jener aber am Mittelpunkte des Cirkels ist. Es verhält sich daher IG : HG = ST : CS, das ist, sin. A + sin. B : 2 cos. ($\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B) = sin. ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) : R (= 1); multiplicirt man die äusern und mittlern Glieder mit einander, so wird sin. A + sin. B = 2 × sin. ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) × cos. ($\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B).

§. 40.

Die Triangel DIR und CST sind bey I und T rechtwinklicht und einander ähnlich, weil der Winkel IDR auf dem Bogen RG an der Peripherie stehet und SCT auf seiner Hälfte SR. Deswegen verhält sich DI : DR = CT : CS, oder sin. A — sin. B : 2 sin. ($\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B) = cos.

$(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B):R\,(=1)$. Multiplicirt man die mittlern und äusern Glieder mit einander, so erhält man das Verhältniß, $\sin. A - \sin. B = 2 \times \cos. (\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) \times \sin. (\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$.

§. 41.

In den Triangeln DIR und CST, die nach §. 40. einander ähnlich sind, verhält sich $RI : DR = ST : CS$, oder $\cos. B - \cos. A : 2 \sin. (\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B) = \sin. (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : R\,(=1)$. Diese Gleichung giebt uns $\cos. B - \cos. A = 2 \times \sin. (\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) \times \sin. (\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. Weil CST und GHI nach dem 39. §. einander ähnlich sind, so folgt auch $HI : HG = CT : CS$, das ist, $\cos. A + \cos. B : 2 \cos. (\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B) = \cos. (\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) : R\,(=1)$; multiplicirt man die äusern und mittlern Glieder mit einander, so bekommt man $\cos. A + \cos. B = 2 \times \cos. (\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) \times \cos. (\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$.

§. 42.

Die Triangel DHI und LCR sind einander ähnlich, da sie rechtwinklicht sind bey I und R, und DHI auf dem doppelten Bogen DPR, LCR aber auf dem einfachen PR stehet. Deswegen verhält sich $DI : IH = LR : CR$. Ausserdem sind auch die Triangel MCR und GHI, die bey R und I rechtwinklicht sind, wegen der Winkel GHI (welcher auf dem doppelten Bogen RG stehet) und RCM (welcher auf seiner Hälfte RS stehet), die sich gleich sind,

einan-

einander ähnlich; daher ergiebt sich das Verhältniß, IH : IG = RC : RM, da nun das erstere war DI : IH = LR : CR, so wird in zusammengesetzten Verhältnissen DI : IG = LR : RM, oder sin. A — sin. B : sin. A + sin. B = tang. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$: tang. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, und $\frac{\text{sin. A + sin. B}}{\text{sin. A — sin. B}} = \frac{\text{tang. } (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)}{\text{tang. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$. Es ist aber auch (§. 26.) tang. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = \frac{1}{\text{cot. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$, deswegen wird auch $\frac{\text{sin. A + sin. B}}{\text{sin. A — sin. B}} = \text{tang. } (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \text{cot. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

§. 43.

In dem vorhergehenden §. sahen wir, daß IH : IG = RC : RM, oder cos. A + cos. B : sin. A + sin. B = R (= 1) : tang. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$; daher $\frac{\text{sin. A + sin. B}}{\text{cos. A + cos. B}} = \text{tang. } (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$.

§. 44.

Weil RP = $\frac{1}{2}$DR, so ist LCR = IGR, ausserdem sind die Winkel bey I und R rechte Winkel und daher die Triangel LCR und RGI einander ähnlich, und es verhält sich IG : IR = CR : LR, das ist, sin. A + sin. B : cos. B — cos. A = R (= 1) : tang. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Deswegen ist $\frac{\text{sin. A + sin. B}}{\text{cos. B — cos. A}} = \frac{1}{\text{tang. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)} = \text{cot. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. §. 26.

§. 45.

Die Triangel DIH und LRC sind einander ähnlich (§. 42.) und geben die Gleichung IH : ID = CR : LR, oder cos. A + cos. B : sin. A — sin. B = R (= 1) : tang. ($\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B). Daher ist $\frac{\text{cos. A + cos. B}}{\text{sin. A — sin. B}} = \frac{1}{\text{tang.}(\frac{1}{2}\text{A} - \frac{1}{2}\text{B})}$

oder $\frac{\text{sin. A — sin. B}}{\text{cos. A + cos. B}} = \text{tang.}(\frac{1}{2}\text{A} - \frac{1}{2}\text{B})$.

§. 46.

Weil in den Triangeln DIR, CRM bey I und R rechte Winkel sind, und der Winkel IDR auf dem doppelten Bogen RG, und der Winkel RCM am Centro auf dem einfachen Bogen RS stehet, so sind diese Winkel einander gleich, und die Triangel ähnlich, und es verhält sich IR : ID = RM : RC, oder cos. B — cos. A : sin. A — sin. B = tang. ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) : R (= 1). Deswegen ist

$\frac{\text{sin. A — sin. B}}{\text{cos B — cos. A}} = \frac{1}{\text{tang.}(\frac{1}{2}\text{A} + \frac{1}{2}\text{B})} = \text{cot.}(\frac{1}{2}\text{A} + \frac{1}{2}\text{B})$

nach §. 26.

§. 47.

Wir haben (§. 43.) gefunden, daß $\frac{\text{sin. A + sin. B}}{\text{cos. A + cos. B}}$ = tang. ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) und (§. 44.) $\frac{\text{sin. A + sin. B}}{\text{cos. B — cos. A}} = \frac{1}{\text{tang.}(\frac{1}{2}\text{A} - \frac{1}{2}\text{B})}$; es wird daher $\frac{\text{sin. A + sin. B}}{\text{cos. A + cos. B}}$:

sin. A

$$\frac{\text{sin. A} + \text{sin. B}}{\text{cos. B} - \text{cos. A}} = \text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\text{A} + \tfrac{1}{2}\text{B}\right) : \frac{1}{\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}\text{B}\right)},$$

und wenn man das erstere durch das leztere dividirt, so wird $\frac{\text{cos. B} - \text{cos. A}}{\text{cos. A} + \text{cos. B}} = \text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\text{A} + \tfrac{1}{2}\text{B}\right) \times \text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}\text{B}\right)$.

§. 48.

Wir fanden (§. 35.), daß cos. (A + B) = cos. A × cos. B — sin. A × sin. B, und (§. 36.) cos. (A — B) = cos. A × cos. B + sin. A × sin. B. Deswegen wird cos. (A — B) — cos. (A + B) = cos. A × cos. B + sin. A × sin. B — cos. A × cos. B — sin. A × sin. B = 2 sin. A × sin. B, und sin. A × sin. B = $\frac{1}{2}$ cos. (A — B) — $\frac{1}{2}$ cos. (A + B).

§. 49.

In eben den Paragraphen haben wir gefunden, daß sin. (A + B) = sin. A × cos. B + sin. B × cos. A, und daß sin. (A — B) = sin. A × cos. B — sin. B × cos. A. Deswegen findet man sin. (A + B) + sin. (A — B) = 2 sin. A × cos. B, und sin. A × cos. B = $\frac{1}{2}$ sin. (A + B) + $\frac{1}{2}$ sin. (A — B).

§. 50.

Aus eben diesen §§. folgt auch, sin. (A + B) — sin. (A — B) = 2 sin. B × cos. A, oder sin. B × cos. A = $\frac{1}{2}$ sin. (A + B) — $\frac{1}{2}$ sin. (A — B).

§. 51.

Ingleichen folgt auch eben daraus, daß cos. (A + B) + cos. (A — B) = 2 cos. A × cos. B, oder $\frac{1}{2}$ cos. (A + B) + $\frac{1}{2}$ cos. (A — B) = cos. A × cos. B.

§. 52.

Wir wollen nun diese Formeln in eine Ordnung bringen.

I. Sin. $\frac{1}{2}$ A = cos. $\frac{1}{2}$ Supplem. A.
II. cos. $\frac{1}{2}$ A = sin. $\frac{1}{2}$ Supplem. A.
III. tang. $\frac{1}{2}$ A = cot. $\frac{1}{2}$ Supplem. A.
IV. cot. $\frac{1}{2}$ A = tang. $\frac{1}{2}$ Supplem. A.

} §. 23.

V. $\text{sin. A} = \text{cos. A} \times \text{tang. A} = \frac{\text{cos. A.}}{\text{cot. A.}} = \frac{\text{tang. A}}{\text{sec. A}}$.

§. 24.

VI. $\text{cos. A} = \text{sin. A} \times \text{cot. A} = \frac{\text{sin. A}}{\text{tang. A}} = \frac{\text{sin. 2 A}}{\text{2 sin. A}}$
$= \text{R} - 2\,\text{sin.}^2\,\frac{1}{2}\text{A}$. §. 25.

VII. $\text{tang. A} = \frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}} = \frac{\text{R}^2}{\text{cot. A}} = \text{sin. A} \times \text{sec. A}$.

§. 26.

VIII. $\text{cot. A} = \frac{\text{cos. A}}{\text{sin. A}} = \frac{\text{R}^2}{\text{tang. A}}$. §. 27.

VIIII. $\cot. A \times \text{tang}. A. = R^2$. ebendaſ.

X. $\frac{1}{2}\text{ſin}. 2A = \text{coſ}. A \times \text{ſin}. A = \frac{\text{ſin}.^2 A}{\text{tang}. A} = \text{ſin}.^2 A \times \cot. A.$ §. 28.

XI. $R \pm \text{coſ}. A = 2\,\text{coſ}.^2 \frac{1}{2}A = \frac{\text{ſin}. A}{\text{tang}. \frac{1}{2}A}$. §. 29.

XII. $R - \text{coſ}. A = 2\,\text{ſin}.^2 \frac{1}{2}A = \text{ſin}. A \times \text{tang}. \frac{1}{2}A$. §. 30.

XIII. $\frac{R - \text{coſ}. A}{R + \text{coſ}. A} = \text{tang}.^2 \frac{1}{2}A$. §. 31.

XIIII. $\frac{R + \text{coſ}. A}{R - \text{coſ}. A} = \cot.^2 \frac{1}{2}A$. §. 31.

XV. $\frac{R + \text{tang}. A}{R - \text{tang}. A} = \frac{R}{\text{tang}. (45° - A)} = \text{tang}. (A +$ 45°) wenn nemlich A kleiner als 45° iſt; iſt aber A gröſſer, ſo wird $\frac{\text{tang}. A + R}{\text{tang}. A - R} = \frac{R}{\text{tang}. (A - 45°)}$ §. 32.

XVI. $\frac{\text{coſ}. A - \text{ſin}. A}{\text{coſ}. A + \text{ſin}. A} = \text{tang}. (45° - A)$ wenn A kleiner als 45° iſt; iſt A aber gröſſer als 45°, ſo wird $\frac{\text{ſin}. A - \text{coſ}. A}{\text{ſin}. A + \text{coſ}. A} = \text{tang}. (A - 45°)$. §. 33.

XVII. $\frac{\text{ſin}. A}{R + \text{coſ}. A} = \frac{R - \text{coſ}. A}{\text{ſin}. A} = \text{tang}. \frac{1}{2}A$. §. 34.

XVIII. Sin. $(A \pm B) =$ sin. A $\times$ cos. B $\pm$ sin. B $\times$ cos. A. (§. 35. 36.)

XIX. cos. $(A \pm B) =$ cos. A $\times$ cos. B $\mp$ sin. A $\times$ sin. B. (§. 35. 36.)

XX. $\frac{\text{sin. } (A + B)}{\text{Sin. } (A - B)} = \frac{\text{tang. A} + \text{tang. B}}{\text{tang. A} - \text{tang. B}}$ §. 37.

XXI. $\frac{\text{cos. } (A + B)}{\text{cos. } (A - B)} = \frac{\text{cot. A} - \text{tang. B}}{\text{cot. A} + \text{tang. B}} = \frac{\text{cot. B} - \text{tang. A}}{\text{cot. B} + \text{tang A}}$.

§. 38.

XXII. sin. A + sin. B $=$ 2 $\times$ sin. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times$ cos. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. §. 39.

XXIII. sin. A $-$ sin. B $=$ 2 $\times$ sin. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) \times$ cos. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$. §. 40.

XXIIII. cos. A + cos. B $=$ 2 $\times$ cos. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times$ cos. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. §. 41.

XXV. cos. B $-$ cos. A $=$ 2 $\times$ sin. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times$ sin. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. §. 41.

XXVI. $\frac{\text{sin. A} + \text{sin. B}}{\text{sin. A} - \text{sin. B}} =$ tang. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times$ cot. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = \frac{\text{tang. } (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)}{\text{tang. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$. §. 42.

XXVII. $\frac{\text{sin. A} + \text{sin. B}}{\text{cos. A} + \text{cos. B}} =$ tang. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$. §. 43.

XXVIII.

XXVIII. $\frac{\text{sin. A} + \text{sin. B}}{\text{cos. B} - \text{cos. A}} = \text{cot.} \left(\frac{1}{2}\text{A} - \frac{1}{2}\text{B}\right) = \frac{R}{\text{tang.} \left(\frac{1}{2}\text{A} - \frac{1}{2}\text{B}\right)}$. §. 44.

XXVIIII. $\frac{\text{sin. A} - \text{sin. B}}{\text{cos. A} + \text{cos. B}} = \text{tang.} \left(\frac{1}{2}\text{A} - \frac{1}{2}\text{B}\right)$. §. 45.

XXX. $\frac{\text{sin. A} - \text{sin. B}}{\text{cos. B} - \text{cos. A}} = \text{cot.} \left(\frac{1}{2}\text{A} + \frac{1}{2}\text{B}\right) = \frac{R}{\text{tang.} \left(\frac{1}{2}\text{A} + \frac{1}{2}\text{B}\right)}$. §. 46.

XXXI. $\frac{\text{cos. B} - \text{cos. A}}{\text{cos. B} + \text{cos. A}} = \text{tang.} \left(\frac{1}{2}\text{A} + \frac{1}{2}\text{B}\right) \times \text{tang.} \left(\frac{1}{2}\text{A} - \frac{1}{2}\text{B}\right) = \frac{\text{tang.} \left(\frac{1}{2}\text{A} + \frac{1}{2}\text{B}\right)}{\text{cot.} \left(\frac{1}{2}\text{A} - \frac{1}{2}\text{B}\right)}$. §. 47.

XXXII. $\text{sin. A} \times \text{sin. B} = \frac{1}{2} \text{cos.} (\text{A} - \text{B}) - \frac{1}{2} \text{cos.} (\text{A} + \text{B})$. §. 48.

XXXIII. $\text{sin. A} \times \text{cos. B.} = \frac{1}{2} \text{sin.} (\text{A} + \text{B}) + \frac{1}{2} \text{sin.} (\text{A} - \text{B})$. §. 49.

XXXIIII. $\text{cos. A} \times \text{sin. B} = \frac{1}{2} \text{sin.} (\text{A} + \text{B}) - \frac{1}{2} \text{sin.} (\text{A} - \text{B})$. §. 50.

XXXV. $\text{cos. A} \times \text{cos. B} = \frac{1}{2} \text{cos.} (\text{A} + \text{B}) + \frac{1}{2} \text{cos.} (\text{A} - \text{B})$. §. 51.

§. 53.

Bey allen diesen Formeln merke der Anfänger, daß der Winkel A grösser als B angenommen werde. Sollte ihm in Absicht der Zeichen etwas zweifelhaftes aufstossen, so sehe er die einer jedem Formel beygesezten Paragraphen nach, und er wird alsdann aus dem Beweise leicht sehen, was er für ein Zeichen zu setzen habe.

Dritter Abschnitt.

Von der Verfertigung der Tafeln und dem Gebrauche der Logarithmen.

§. 54.

Aus dem Zusatze im 20. §. folgt, daß, wenn das Verhältniß des Radius, den wir in den Formeln des vorigen Abschnittes als 1 angenommen haben, zu dem Sinus oder Cosinus eines Winkels gegeben wird, alle andere trigonometrische Linien, die zu einem solchen Winkel oder Bogen gehören, daraus gefunden werden können, vorzüglich wenn die erklärten Formeln dabey angewendet werden. Denn wird der Sinus gegeben, so wird auch der Cosinus gegeben, der $= \sqrt{R^2 - \text{sin.}^2}$ ist; wird Sinus und Cosinus gegeben, so wird auch der Tangens $= \frac{\text{sin. A} \times R}{\text{cos. A}}$, und der Cotangens $= \frac{\text{cos. A} \times R}{\text{sin. A}}$ gegeben. Sieh. §. 52.

§. 55.

Durch Hülfe dieser Formeln kann auch, wenn das gegeben wird, was man bey dem einfachen Bogen gebraucht, alles das gefunden werden, was zu dem doppelten Bogen gehört. Denn da (§. 52. XVIII.) sin. $(A+B) = \text{sin. } A \times \text{cos. } B + \text{sin. } B \times \text{cos. } A$ war, so darf man nur $A = B$ annehmen, und es wird sin. 2 A $= \frac{2 \text{ sin. } A \times \text{cos. } A}{R}$, und wenn wir diesen angenommenen Werth beybehalten, so folgt aus XIX, daß cos. 2 A $= \frac{\text{cos.}^2 A}{R} - \frac{\text{sin.}^2 A}{R}$. Hier merke der Anfänger, daß die Berechnung der Sinus und Cosinus in den Tafeln nur für spitzige Winkel angestellt werde, und daher A nie grösser als 45° sey (denn wenn $A = 45°$ ist, so ist cos. $A =$ sin. A, weil der Triangel gleichschenklicht ist, und cos. 2 A = cos. 90° = 0); sondern A ist stets kleiner als 45°.

§. 56.

Eben so kann man, wenn alles gegeben ist, was zu einem gewissen Bogen A erforderlich ist, durch Hülfe eben dieser Formeln alles finden, was zu dem halben Bogen gehört. Man darf nur die Formel XI. gebrauchen, wo R + cos. A = 2 cos.^{2} $\frac{1}{2}$ A war, oder $= \frac{\text{sin. A}}{\text{tang. } \frac{1}{2} A}$; daher ist tang. $\frac{1}{2} A = \frac{\text{sin. A}}{R + \text{cos. A}}$. Wird die

Tan-

Tangente gegeben, so wird man durch den 20ten §. den Sinus und Cosinus u. s. w. finden. Eben dies konnte aus der XVIII. Formel gefunden werden, wenn man A = 2B annahm, und das Zeichen — gebrauchte. Wir fügen hier noch folgende zwey Lehrsätze hinzu.

§. 57.

Erster Lehrsatz. Die Summe aus dem Sinus KM (Fig. 11.) des Bogens KA, der unter 30° ist, und dem Produkt der $\sqrt{3}$ in KI, den Sinus der Differenz des Bogens KA von 30°, ist gleich dem Sinus FN des Bogens FA, der um eben so viel über 30°, als der Bogen KA unter ihnen ist.

Beweis. Es sey der Bogen AB = 30° und BF = BK; weil die Triangel SIF und SGQ rechtwinklicht und einander ähnlich sind, so ist der Winkel IFS = GQS = BCA = 30°; daher, weil KFS = 30°, so ist GK = $\frac{1}{2}$FK (§. 14.) = IK = FI. Es ist aber $FK^2 - GK^2 = FG^2$, oder $4IK^2 - KI^2 = 3KI^2 = FG^2$, und daher IK × $\sqrt{3}$ = FG. Nun ist aber FG + GN = FG + KM = FN = KM + IK × $\sqrt{3}$. W. Z. E. W.

§. 58.

Zweyter Lehrsatz. Die Summe aus dem Sinus FT des Bogens HF, der unter 60 Graden ist, und dem

Sinus

Sinus FI, der Differenz des Bogens HF von 60°, ist gleich dem Sinus KO, des Bogens HK, der so viel über 60° als der Bogen HF darunter ist.

Beweis. Denn es ist aus dem Beweise des vorhergehenden Lehrsatzes deutlich, daß FI = GK, und es ist offenbahr, daß TF + GK = KO. Daraus ergiebt sich der Satz. Aus dem Grunde ist sin. 55° + sin. 5° = sin. 65°.

§. 59.

Nachdem wir dies nun so festgesetzt haben, so erhellet (§. 56.), daß wenn der Sinus des Bogens von 30° gegeben ist (welcher, wenn R = 1 angenommen wird, wie bekannt, $= \frac{1}{2}$ ist), die Sinus und Cosinus der halben Bogen stets durch die Division mit 2 können gefunden werden, folglich die Sinus von 15°, 7° 30′, 3° 45′, 1° 52′ 30″, 56′ 15″ und so weiter, bis man zwölfmahl getheilt hat, wo man endlich den Bogen von 52″ 44‴ $3\frac{3}{4}$⁗ erhält, welcher ohne einen merklichen Fehler zu begehen, für den Bogen selbst angenommen werden kann, indem sehr kleine Bogen mit ihren Sinussen in einerley Verhältnisse stehen. Wenn ich daher den für den Bogen 52″ 44‴ $3\frac{3}{4}$⁗ gefundenen Sinus = m nenne, so muß 52″ 44‴ $3\frac{3}{4}$⁗ : 1′ = m : sin. von einer Minute. Hat man den Sinus von 1′, so wird man (§. 55.) den Sinus vom Bogen 2′ finden können, darauf von 3′ (wenn A = 2′, B = 1′ angenommen wird), hernach 4′, 5′, und

so

so weiter bis auf 30°. Da nun alle Sinus von Bogen, die kleiner als 30° sind, bekannt sind, so werden (§. 57.) die Sinus der Bogen, welche über 30° sich eben so weit hinauf erstrekken bis zum Sinus vom Bogen 60°, gefunden werden. Diesen lernen wir aus der Geometrie kennen, daß er sey $= \sqrt{\frac{3}{2}}$. Endlich können durch Hülfe des 58. §. die Sinus der Bogen über 60° bis 90° gefunden werden. Cosinus, Tangenten, Cotangenten, u. s. w. werden durch die Formeln ohne Schwierigkeit gefunden werden.

§. 60.

Anmerkung. In den gewöhnlichen kleinern Tafeln von Vlacq wird der Sinus totus oder Radius zu 100000,00 angenommen; aber in der Algebra nimt man ihn weit bequemer zu 1 an. Will man daher die Sinus für den Radius $= 1$ gebrauchen, so darf man nur statt ganzer Zahlen Decimalbrüche gebrauchen. Wenn z. B. für den Sinus von 60°, der $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, die Hälfte der Quadratwurzel von 3 gefunden werden soll, so wird man 0,8660254 erhalten; sucht man in den Tafeln, so wird man darinn den Sinus 60° $=$ 8660254 finden. Man sieht daraus, daß in beyden Fällen einerley Zahlzeichen erhalten werden, auser daß sie in den Tafeln Zeichen ganzer Zahlen sind. Hat man daher einen Sinus für einen Winkel unter 90° in den Tafeln gefunden, so

sez

sezt man o davor und einen Strich, als ein Comma dazwischen, um den Decimalbruch anzuzeigen. Doch man muß acht geben, daß, weil im Sinus totus 100000,00 oder 10000000, sieben Nullen befindlich sind, bey einem andern Sinus, der aus wenigern Zahlzeichen als sieben besteht, zu denselben noch so viel Nullen vor den Strich hinzugesezt werden müssen, als nöthig sind, um die sieben Zahlzeichen zu erhalten. Es sey zum Beyspiel der Sinus von 2° 30′ genommen, der in den Tafeln 4361,94 oder 436194 ist; weil er nur aus sechs Zeichen besteht, so wird man noch vor den Strich eine Null sezzen und 0,0436194 schreiben müssen, wenn man desselben Bogens Sinus für den Radius = 1 haben will. Eben so muß man für den Sinus von 0° 30′, der = 87265 ist, 0,0087265 schreiben. Weil aber die Tangenten für grössere Winkel als 45° grösser als der Sinus totus werden, so muß man, um die in den Tafeln gefundenen Tangenten dem Radius = 1 angemessen zu machen, von dem zwischen den Zahlen gesetzten Striche gegen die linke Hand zu zählen, und fünf Zeichen abschneiden (denn das letztere oder die letztern zwey Zahlzeichen gegen die rechte Hand sind in den Tafeln Decimalbrüche), und den Strich dazwischen sezzen. Diejenigen, welche nach der linken Hand hin auf diesen Strich folgen, sind ganze Zahlen. Z. B. der Tangens von 89° ist in den Tafeln = 5728996,2; um ihn auch für den Sinus totus = 1 zu erhalten, schreibe

man

man 57,289962, wo nun 57 ganze Einheiten, das übrige Decimalbrüche sind. Auf eben die Art ist der Tangens von 66° 10′ in den Tafeln = 226373,57; für den Radius = 1 wird er 2,2637357. Was von den Sinussen gesagt worden ist, muß man auch auf die Cosinus anwenden; so wie das, was von den Tangenten gesagt ist, auch von den Sekanten muß verstanden werden.

§. 61.

Weil aber bey so vielen Zahlen, als man für die Sinus, Cosinus u. s. f. braucht, die arithmetischen Berechnungen zu beschwerlich wären, so hat man auf eben die Art, wie wir in der Algeber gezeigt haben, für sie die Logarithmen gefunden, nur mit dem Unterschiede, daß für den Sinus totus die Charakteristik 10 angenommen ist, und daher der Logarithme für den ganzen Radius oder Sinus totus 10,0000000 ist.

§. 62.

Bey den trigonometrischen Rechnungen und Aufgaben bedient man sich ietzt der Sekanten nicht, daher befinden sie sich auch in den mehresten Tafeln nicht. Sollte man sie aber gebrauchen, so können sie leicht gefunden werden. Denn es verhält sich (Fig. 2.) CI : CF = CA : CG, das ist, cos. : R = R : sec., folglich ist $\text{sec.} = \frac{R^2}{\text{cos.}}$.

Wollte man auch den Logarithmen für den Sekanten haben,

ben, so wird dieser (wie selbst dieser Ausdruk des Sekanten lehrt) alsdann gefunden werden, wenn man von dem doppelten Logarithmen des Sinus totus, oder von 20,0000000 den Logarithmen des Cosinus abziehet. Wenn man z. B. den Logarithmen des Sekans von 60° sucht, so suche man den Logarithmen des Cosinus von 60°, oder den Logarithmen des Sinus von 30°, der in den Tafeln 9,6989700 ist; ziehe ihn von 20,0000000 ab, so wird 10,3010300 für den Logarithmen des Sekans von 60° übrig bleiben. Der Cosekans wird aus der Gleichung (Fig. 2.) IF : FC = BC : Cf, oder sin. : R = R : cosec. gefunden, daher ist cosec. = $\frac{R^2}{sin.}$.

§. 63.

Eine gewisse Grösse durch den Sinus, oder Cosinus, oder Tangens, oder Cotangens eines Winkels dividiren, ist eben das, als sie durch $\frac{1}{sin.}$, oder $\frac{1}{cos.}$, oder $\frac{1}{tang.}$, oder $\frac{1}{cot.}$ multipliciren. Nehme ich den Radius = 1 an, so ist cosec. = $\frac{1}{sin.}$, sec. = $\frac{1}{cos.}$, tang. = $\frac{1}{cot.}$, cotang. = $\frac{1}{taang.}$. Siehe §. 52. die IX. Formel. Daher wird man die Multiplikation statt der Division gebrauchen können, und folglich, wenn man sich der Logarithmen be-

dient, die Addition statt der Subtraktion, nur statt der Logarithmen des Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens, muß man ihre arithmetischen Complemente gebrauchen. Das ist aber wohl zu merken, wenn in diesen Formeln cosec. $= \frac{1}{\text{sin.}}$ u. s. w. die Einheit das Quadrat des Radius ist, dessen Logarithme 10,0000000 ist, der Logarithme des Quadrats 20,0000000 ist. Daher kann die Subtraktion der Logarithmen der Sinus, Cosinus u. s. w. in eine Addition des arithmetischen Complements verwandelt werden, nur muß der Logarithme des Sinus, Cosinus, u. s. w. von 20,0000000 abgezogen werden. Der Gebrauch des arithmetischen Complements findet daher nicht allein bey den Logarithmen der natürlichen Zahlen, sondern auch bey den Logarithmen der Sinus, Cosinus und so weiter statt.

§. 64.

Die gewöhnlichen Tafeln enthalten gemeiniglich nur die Sinus, Cosinus u. s. w. für einzelne Minuten, in grössern hat man sie auch für jede zehnte Sekunde. Gebraucht man daher die Logarithmen und sucht für einen Bogen, der in den Tafeln nicht genau steht, den Logarithmen, so werden eben die Aufgaben, welche wir in der Algeber, wo wir von den Logarithmen redeten, aufgelöst haben, nützen können. Nemlich man nehme den Logarithmen des nächst kleinern Bogens als des gegebenen, und

suche seine Differenz von dem nächst grössern. Weil die Differenz der Bogen in den Tafeln 1′ oder 60″ ist, so mache man diese Proportion: 60″ machen die gefundene Differenz der Logarithmen in den Tafeln, was machen die Sekunden, die bey den Graden und Minuten des gegebenen Bogens befindlich sind, für welchen der Logarithme gesucht wird? Den aus dieser Gleichung gefundenen vierten Terminus addire man zu dem kleinern Logarithmen in den Tafeln, so wird man den Logarithmen für den gegebenen Bogen viel genauer haben.

Gesetzt es sey der Logarithme des Cosinus vom Bogen 9° 31′ 7″ zu suchen. Man ziehe diesen Bogen von 90° ab, um sein Complement 80° 28′ 53″ zu erhalten, suche seines Sinus Logarithmen, so wird man finden, daß der Logarithme von 80° 29′ sey 9,9939815; der Logarithme von 80° 28′, 9,9939603 sey, ihre Differenz ist 212; deswegen 60″ : 53″ = 212 : x; man wird erhalten 187; diese Zahlen addire man zu 9,9939603, die Summe welche 9,9939790 ist, wird der gesuchte Logarithme des Cosinus seyn.

Wenn der Logarithme eines Sinus oder Cosinus gegeben wird, der in den Tafeln nicht genau stehet, und man frägt, zu welchem Bogen er gehöre, so muß man die Ordnung des erstern Verfahrens umkehren. Man suche nehmlich unter den Logarithmen der Sinusse denje-

nigen Logarithmen, der nach dem gegebenen der grössere und kleinere ist, und schreibe ihre Differenz hin. Darauf ziehe man auch den nächst kleinern von dem gegebenen ab und sage: es verhält sich die Differenz der Logarithmen in den Tafeln, nemlich des grössern und kleinern als unser gegebener ist, zu der Differenz des gegebenen und zunächst kleinern, wie 60″ zu den Sekunden, die den Graden und Minuten desjenigen Bogens beygefügt werden müssen, welche dem Logarithmen zugehören, der der nächst kleinere gegen den gegebenen ist.

Exempel. Wenn der Logarithme 9,39017̄63 gegeben wird, zu welchem Sinus und Bogen gehört er? In den Tafeln findet man unter den Logarithmen der Sinusse den nächst grössern 9,3902096, und den nächst kleinern 9,3897106, dieser Sinus gehört zu 14° 12′. Die Differenz der beyden Logarithmen ist 4990. Die Differenz des nächst kleinern von dem gegebenen ist 4657. Daher folgt die Gleichung $4990 : 4657 = 60'' : x$, x ist daher fast $= 5''$. Deswegen kommt der gegebene Logarithme dem Sinus eines Winkels von 14° 12′ 5″ auf das nächste zu.

§. 65.

Es gibt noch eine andere Anwendung der Formeln XXII. XXIII. (§. 52.), die bey Produkten sehr bequem

gebraucht

gebraucht werden kann, und die ich jetzt noch habe anzeigen wollen. Es werden die Logarithmen zweyer natürlichen Zahlen gegeben, man soll den Logarithmen ihrer Summe finden, ohne die Zahlen selbst zu suchen, zu welchen die gegebenen Logarithmen gehören. Man gebrauche in diesem Falle die Formel XXII. wo es heißt, sin. A + sin. B = 2 × sin. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ × cos. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$, und man nehme an, der grössere Logarithme sey der Logarithme irgend eines Sinus von einem Winkel A, und der kleinere vom Sinus irgend eines kleinern Winkels B. Deswegen addire man zur Charakteristik der Logarithmen so viel Einheiten, als erfodert werden, daß die Charakteristik des grössern = 9 werde, und unter ihr suche man den Winkel, dessen Sinus jener Logarithme zukommt. Hatte der kleinere Logarithme eine gleiche Charakteristik, so suche man unter ebenderselben den gehörigen Winkel. Von diesen Winkeln suche man die halbe Summe, $= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, ingleichen das Complement der halben Differenz $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$, suche hierauf von beyden Winkeln die Logarithmen der Sinusse, addire sie zusammen, und dazu noch den Logarithmen der ordentlichen Zahl 2. Die neue Summe wird seyn Log. (2 × sin. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ × cos. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$). Weil man aber den Logarithmen der natürlichen Zahl haben soll, so muß man von der Charakteristik auser der Zahl 10, noch so viel Einheiten wegwerfen, als man zu einer jeden Charakteristik der gegebenen Logarith-

men hinzugefügt hatte. Was übrig bleibt, ist der gesuchte Logarithme der Summe.

Exempel. Gesetzt der eine grössere gegebene Logarithme sey = 3,6047659, man sezze dafür 9,6047659, der kleinere = 2,9116902, man sezze dafür 8,9116902. Man suche für beyde in den Tafeln die Bogen, deren Sinussen sie zukommen, so wird es sich ergeben, daß dem grösserm der Sinus des Winkels A = 23° 44′ 4″, dem kleinerm der Sinus des Winkels B = 4° 40′ 50″ zukomme. Nun

ist $A + B = 28°24'54''$ $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) = 14°12'27''$.

$A - B = 19°\ 3'14''$ $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = 9°31'37''$.

$\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$ von 90° abgezogen, läßt $80°28'23''$.

Dieser beyden Winkel (nemlich 14° 12′ 27″ und 80° 28′ 23″) Sinus Logarithmen suche man, so wird man

für sin. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) = 9,3899351$,

für cos. $(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = 9,9939684$ finden.

Beyde Logar. nebst den von $2 = 0,3010300$ addire man zusammen, so ergiebt sich 19,6849335.

Weil Sechs Einheiten zur Charakteristik hinzugesezt waren, so werfe man sie nebst 10, folglich hier 16 von der Charakteristik weg, so wird der gesuchte Logarithme übrig bleiben = 3,6849335, dem zunächst die Zahl 4841 zukommt, und nur bey den beyden leztern Zahlen findet sich

ein

ein kleiner Unterschied. Wirklich ist der erste Logarithme, der Logarithme von der Zahl 4025, und der andere ist es von der Zahl 816, deren Summe genau 4841 ist.

Hieraus siehet man, was zu thun sey, wenn der Logarithme der Differenz zu suchen ist. Denn die Formel $\sin. A - \sin. B = 2 \times \cos. (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \sin. (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ wird, auf eben diese Art angewendet, den verlangten Logarithmen geben. Will man sich aber dieser Formeln bedienen, so muß man, ausser den Logarithmen des Sinus und Cosinus der halben Summe und der halben Differenz auch den doppelten Winkel A, und B suchen. Wenn wir unten die Grundsätze der Berechnung der rechtwinkelichten Triangel werden erklärt haben, wollen wir eine andere Formel anführen, worinn nur ein einziger Winkel, der Sinus seines Complements, und der Tangens seiner Hälfte zu suchen ist, um dadurch die Arbeit des Suchens zu verringern.

Vierter Abschnitt.

Von den Grundsätzen bey der Auflösung der Triangel.

§. 66.

Erster Lehrsatz. In einem jedem ebenen Triangel verhalten sich die Seiten zu einander, wie die Sinus der den Seiten entgegen stehenden Winkel.

Beweis. Um einen jeden Triangel kann ein Cirkel gezogen werden: ist das geschehen, so werden die Seiten Sehnen der Bogen werden, deren Hälften die entgegengesezten Winkel messen, indem sie Winkel an der Peripherie sind; dem zu Folge sind die Seiten doppelte Sinus der diesen Seiten entgegengesezten Winkel: nun verhält sich das doppelte zu einander wie das einfache, daher verhalten sich die Seiten wie die Sinus der entgegengesezten Winkel. W. Z. E. W.

§. 67.

Erster Zusatz. Weil in ähnlichen Triangeln die gleichnahmigen Seiten verhältnißmäßig sind, und ein jeder auf dem Felde bezeichneter Triangel einem andern in einem Cirkel eingeschriebenen Triangel, nach dessen Radius die Sinus in den Tafeln berechnet sind, ähnlich ist, wenn er mit ihm gleiche Winkel hat, so folgt deutlich, daß die Seiten des im Felde bezeichneten Triangels sich unter einander eben so verhalten wie die Sinus in den Tafeln, die zu Winkeln gehören, die denen gleich sind, welchen die Seiten des wirklichen Triangels auf dem Felde entgegen stehen.

§. 68.

Zweyter Zusatz. In dem rechtwinklichten Triangel ABC (Fig. 12.) kann man entweder einen mit dem Radius CB oder der Hypotenuse beschriebenen Bogen DB

anneh=

annehmen, oder den Bogen AE mit dem Radius CA; oder mit dem Radius AB den Bogen AF. Im ersten Falle ist es klar, daß BC der Sinus totus werde, die Seite BA der Sinus des Winkels C, und AC der Cosinus des Winkels C, oder Sinus vom Winkel B. Im zweyten Falle folgt, daß AC Sinus totus, und AB der Tangens des Winkels C werde. Im dritten endlich ergiebt es sich, daß der Sinus totus AB, der Tangens des Winkels B, AC sey. Es folgt daraus der Schluß: in dem rechtwinklichten Triangel kann eine jede Seite für den Radius genommen werden. Nimmt man dazu die Hypotenuse an, so werden die Catheten die Sinus der entgegenstehenden Winkel werden; nimmt man aber eine Cathete für den Sinus totus oder den Radius an, so wird die andere der Tangens des entgegenstehenden Winkels seyn.

§. 69.

Dritter Zusatz. Daher folgt, daß folgende Gleichungen richtig sind.

Wie die Seite BC: Seite AC so R: sin. B = R: cos. C.

Wie die Seite AC: Seite AB so R: tang. C.

Wie die Seite BA: Seite AC so R: tang. B.

§. 70.

Vierter Zusatz. Wenn in einem Triangel nur drey Winkel gegeben werden, so kann nur das Verhältniß

der Seiten untereinander, nicht aber ihre Grösse in einer bestimmten Grösse angegeben werden, da Triangel von sehr unterschiedener Grösse einander ähnlich seyn können. Daher muß wenigstens eine bestimmte Grösse von einer Seite angegeben werden, wenn der Triangel soll aufgelöst werden.

§. 71.

Wir haben in der Geometrie (§. 438.) schon den Beweis von dem folgenden Lehrsatze gegeben; weil aber der Gebrauch desselben bey der Auflösung derer Triangel wichtig ist, von welchen drey Seiten ohne einen Winkel gegeben werden, so wird es gut seyn, ihn jetzt wieder ins Gedächtniß zu bringen.

§. 72.

Zweyter Lehrsatz. Wenn in einem Triangel ABC (Fig. 13.) auf die größte Seite AB aus dem entgegengesezten Winkel C ein Perpendikel gezogen wird, welches AB in zwey Theile AE und EB zerschneidet, so wird sich die größte Seite AB zur Summe der übrigen AC + CB verhalten, wie ihre Differenz CB — AC zur Differenz der Abschnitte der größten Seite AB, EB — AE.

Beweis. Es werde mit der kleinern Seite unter denen, die den, der grössern Seite entgegenstehenden Winkel C einschliessen, hier mit AC aus C ein Cirkel beschrieben und BC nach D verlängert, so daß DC = CA

= CG

= CG werde, so wird DB = AC + CB; GB = CB — AC seyn. Weil CE aus dem Centro C auf AH perpendikulair stehet, und in E in zwey gleiche Theile theilet, so ist AE = EH und daher HB = EB — AE. Da nun zwey Sekanten BD und BA aus einerley Punkte B gezogen werden, so werden sie den ausserhalb des Zirkels befindlichen, und zwischen dem Punkt B liegenden Theilen umgekehrt proportionirt seyn, und deswegen AB : BD = GB : HB, das ist, AB : AC + CB = CB — AC : EB — AE. W. Z. E. W.

§. 73.

Nähme man an, daß die Seiten AC und CB gleich wären, so wird man leicht sehen, daß AB die Sehne würde, und die Segmente einander gleich würden.

§. 74.

Dritter Lehrsatz. In jedem ebenen Triangel CBA (Fig. 14.) verhält sich die Summe der Seiten, die den Winkel B einschliessen, CB + BA zu ihrer Differenz, wie der Tangens der halben Summe der beyden andern Winkel, zu dem Tangens ihrer halben Differenz.

Beweis. Man beschreibe aus dem Centro B mit einem Radius, welcher der kleinern Seite BC gleich ist, einen Cirkel, und verlängere AB nach G, so wird GA = CB + BA, PA = BA — BC. Man ziehe die Punkte

G, C, P

G, C, P mit Sehnen zusamm, man ziehe hiernächst auch PD der Sehne GC parallel. Der Winkel GCP wird, als in einem halben Cirkel stehend, ein rechter seyn, und deswegen auch CPD sein Wechselswinkel gleichfals. Auserdem ist der äuserliche Winkel GBC gleich der Summe der ihm entgegenstehenden beyden innern Winkel BAC + BCA, und daher der Winkel an der Peripherie GPC, als die Hälfte des am Centro befindlichen Winkels GBC, ihrer halben Summe gleich.

Es ist nun deutlich, da GPC = BAC + PCA und GPC die halbe Summe und BAC kleiner als die übrigen Winkel ist, daß PCA die halbe Differenz der beyden Winkel BCA und BAC sey, indem er, wenn man ihn zum kleinern giebt, die halbe Summe ausmacht, und thut man ihn zur halben Summe BPC, oder BCP, er alsdenn den grössern BCA giebt. Da GCP und CPD rechtwinklicht sind, so wird man CP in beyden für den Sinus totus oder Radius annehmen können, und CG wird der Tangens des Winkels GPC, der halben Summe der Winkel C und A, und PD der Tangens ihrer halben Differenz seyn; und weil in dem Triangel GCA der Construktion zu Folge PD mit GC parallel ist, so wird GA : PA = GC : PD, das ist, CB + BA : BA — BC = tang. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C)$: tang. $(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A)$. W. Z. E. W.

§. 75.

§. 75.

Anmerkung. Diese Gleichung kann auch auf die beyden andern folgenden zurükgetragen werden: Wie sich verhält die Seite BC zur grössern Seite AB, so verhält sich der Radius zum Tangens eines Winkels, von dem man 45° abziehen kann (denn er wird stets grösser seyn, da AB grösser als BC ist). Hiernächst: Wie sich verhält der Radius zum Tangens des übrig bleibenden Winkels, so verhält sich tang. $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C)$: tang. $(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A)$. Verlängert man nemlich BA, daß PT = BP = BC, und PM = BA wird, so wird TM = BA — BC. Es werde gleichfals der Winkel NBM = 45°; und aus den Punkten T und M lasse man auf BN die Perpendikel TK und MN, und ziehe PK zusammen. Es folgt deutlich, daß die Triangel BKP, BKT, BNM rechtwinklichte, gleichschenklichte und ähnliche Triangel sind, und daher BK = KT; BP = KP = PT = BC; und BN = MN sind. Daher verhält sich in dem Triangel PKM, PK (oder BC) : PM (oder BA) = R : tang. PKM (§. 68). Zieht man 45° = PKT von diesem Winkel ab, so bleibt TKM = KMN (weil KT und NM Parallellinien sind) übrig. Ferner ist (§. 68.) R : tang. KMN = MN (oder BN) : NK; es ist aber BN : NK = BM : MT = CB + BA : BA — CB; daher, da wir gezeigt haben, daß CB + BA : BA — CB = tang. $(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A)$: tang. $(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A)$,

so

so wird auch R : tang. KMN = tang. ($\frac{1}{2}$C + $\frac{1}{2}$A) : tang. ($\frac{1}{2}$C — $\frac{1}{2}$A).

§. 76.

Dieses wenige ist genug, um einen jeden Triangel, von dem drey Theile gegeben werden, aufzulösen, nemlich wenn man entweder alle Seiten, oder zwey Seiten nebst einem Winkel, oder zwey Winkel und eine Seite hat. Nur muß man Acht haben, wie man die erklärten Grundsätze bey einzelnen Fällen anwenden könne, welches wir im folgenden Abschnitte zeigen wollen. Jetzt ist noch übrig, daß wir unser §. 65. gethanes Versprechen erfüllen und die Formel zeigen, wodurch man, wenn man die Logarithmen zweyer Zahlen hat, den Logarithmen der Summe oder Differenz erhalten kann, ohne daß es nöthig sey, zwey verschiedene Winkel zu suchen.

§. 77.

Es stelle AB (Fig. 15.) die grössere Zahl vor, die dem grössern Logarithmen zukomme, und AC die kleinere, welcher der kleinere Logarithme zugehöre, AB sey der Diameter, und AC eine Sehne im halben Cirkel. Man verlängere AC nach E, daß AE = AB sey, so wird CE die Differenz werden. Weil der Winkel in dem halben Cirkel BCA ein rechter ist, so kann (§. 68.) BA für den Radius genommen werden, und es wird BA : AC = R : sin. ABC. Der Winkel dieses Sinus, oder vielmehr

der

der Bogen, der ihm zukommt, wird in den Tafeln gefunden werden, und daher wird auch sein Complement BAC und dessen Hälfte BAD erhalten werden. Denn wenn aus A nach D eine gerade Linie AD gezogen wird, so ists einleuchtend, daß die Basis BE in D in dem gleichschenkligten Triangel in zwey Theile getheilt werde, weil in D ein rechter Winkel ist, da der Triangel in einem halben Cirkel stehet. Man nehme nun aus den Tafeln den Logarithmen des sin. BAC und den Logarithmen des tang. $\frac{1}{2}$BAC, oder des tang. BAD.

Man sieht leicht, daß die Triangel BCE, ADE und BAD einander ähnlich sind, die leztern wegen AB = AE, und BD = DE und der rechten Winkel bey D; die erstern wegen der rechten Winkel bey D und C und des gemeinschaftlichen E. Es folgen daher folgende Gleichungen.

$$R : \text{sin. BAC} = AB : BC = \frac{AB \times \text{sin. BAC}}{R}.$$

$$R : \text{sin. } \tfrac{1}{2}\text{BAC} = AB : BD = \frac{AB \times \text{sin. } \frac{1}{2}\text{BAC}}{R}.$$

$$BD : BF = \text{cos. } \tfrac{1}{2}\text{BAC} : R; \text{ daher } BF = \frac{BD \times R}{\text{cos. } \frac{1}{2}\text{BAC}}$$

$$= \frac{AB \times \text{sin. } \frac{1}{2}\text{BAC}}{\text{cos. } \frac{1}{2}\text{BAC}}.$$

BF : BC = AB : AB + AC, wegen des Winkels BAC, der durch AF in zwey Theile zerschnitten ist;

oder,

oder, $\frac{AB \times \text{sin. } \frac{1}{2} BAC}{\text{cos. } \frac{1}{2} BAC} : \frac{AB \times \text{sin. } BAC}{R} = AB :$

$AB + AC = \frac{AB \times \text{sin. } BAC \times \text{cos. } \frac{1}{2} BAC}{R \times \text{sin. } \frac{1}{2} BAC}$. Es ist

aber $\frac{R \times \text{sin. } \frac{1}{2} BAC}{\text{cos. } \frac{1}{2} BAC} = \text{tang. } \frac{1}{2} BAC$. Deswegen ist

$AB + AC = \frac{AB \times \text{sin. } BAC}{\text{tang. } \frac{1}{2} BAC}$; und gebraucht man die

Logarithmen, so wird Log. (AB + AC) = Log. sin. BAC + Log. AB — Log. tang. $\frac{1}{2}$ BAC.

§. 78.

Für den Logarithmen der Differenz CE. Man nehme wieder die Gleichung an AB : AC = R : sin. ABC, diesen suche man, und nehme von seinem Sinus Complementi den Logarithmen, ingleichen den Logarithmen vom Tangens des halben Complements, wie vorher. Da eben dieselbe Zusammensetzung bleibt, so bleiben auch folgende Gleichungen.

$R : \text{sin. } \frac{1}{2} BAC = AB : BD = \frac{AB \times \text{sin. } \frac{1}{2} BAC}{R}$, und

$2 BD = BE = \frac{2 AB \times \text{sin. } \frac{1}{2} BAC}{R}$.

$AE : DE = AB : BD = BE : CE = BE : AB - AC$,

das ist $AB : \frac{BD \times \text{sin. } \frac{1}{2} BAC}{R} = \frac{2 AB \times \text{sin. } \frac{1}{2} BAC}{R}$.

$: AB - AC = \frac{2 AB \times \text{sin.}^2 \frac{1}{2} BAC}{R^2}$.

Es ist aber (§. 52. Form. XII.) $2 \sin.^2 \frac{1}{2} BAC = \sin. BAC \times \text{tang.} \frac{1}{2} BAC$; daher, wenn ich diesen Werth substituire, so wird $AB - AC = AB \times \sin. BAC \times \text{tang.} \frac{1}{2} BAC$, und gebrauche ich die Logarithmen, so ist Log. $(AB - AC)$ = Log. AB + Log. sin. BAC + Log. tang. $\frac{1}{2}$ BAC — 2 Log. R.

Exempel. Wir wollen annehmen, es würden uns eben die Logarithmen als oben (§. 65.) gegeben: nemlich Log. AB = 3,6047659, und der Log. AC = 2,9116902. Wenn man sagt, AB : AC = R : sin. ABC, und man gebraucht die Logarithmen, so wird man diese arithmetische Proportion haben, Log. AB — Log. AC = Log. R — Log. sin. ABC, und daher Log. sin. ABC = Log. AC + Log. R — Log. AB.

Es ist bekannt, daß Log. R = 10,0000000; wenn daher der Log. R zu einem andern Logarithmen zu addiren ist, so darf man nur desselben Charakteristik um 10 vermehren; dem zu Folge ist

Log. AC + Log. R = 12,9116902
— Log. AB = 3,6047659

Differenz = Log. sin. ABC = 9,3069243.

Dieser Logarithme gehört nach den Tafeln zu 11° 41′ 48″, weil aber bey der nach §. 64. vorzunehmenden Proportion mehr als $\frac{1}{2}$ (nemlich 33‴) übrig bleibt, so wird man genauer 11° 41′ 49″ annehmen können, dessen Complement

oder BAC = 78° 18′ 11″ ist; und $\frac{1}{2}$ BAC = 39° 9′ 5″. Ferner, der Log. sin. BAC wird (§. 64) = 9,9908863, und der Log. des Tangens $\frac{1}{2}$ BAC = 9,9107142 gefunden,

daher Log. AB = 3,6047659
Log. sin. BAC = 9,9908863
Arithm. Compl. vom tang. $\frac{1}{2}$ BAC = 10,0892858

Summe = 23,6849380.

Weil wir uns des arithmetischen Complements des Tangens bedient haben, und der Logarithme der Einheit bey den Sinussen 10 ist, so muß 10 zweymahl aus der Charakteristik der Summe weggeworfen werden, so daß der Logarithme (AB + AC) sey = 3,6849380, welcher mit dem oben (§. 65.) gefundenen bis auf die beyden leztern Zahlzeichen übereinkommt, daß also eben dieselbe Summe in ganzen Zahlen erhalten wird.

Suchet man Log. (AB — AC), so werden eben diese Logarithmen dazu dienen können, denn

Log. AB = 3,6047659
Log. sin. BAC = 9,9908863
Log. tang. $\frac{1}{2}$ BAC = 9,9107142

Summe = 23,5063664, werfen wir 10 zweymahl weg, oder ziehn den Logarithmen des Radius zweymahl genommen ab, so bleibt der Logarithme

der

der Differenz übrig = 3,5063664, welcher von dem Logarithmen der Zahl 3209 = 3,5063697 nur blos in Absicht der leztern beyden Zahlzeichen unterschieden ist, daß also die wahre Differenz in wirklichen Zahlen gefunden ist.

§. 79.

Wir könnten noch mehrere Arten anführen, die dieses zu finden lehren; aber es ist nicht nöthig. Die Anfänger haben dies überhaupt zu merken, daß wenn man sehr kleine Winkel bekömmt, die Unterschiede der Logarithmen in den kleinen Tafeln zu groß sind, als daß die proportionirten Ausdrükke §. 64. hinreichend genau seyn sollten. Daher muß man in der Trigonometrie überhaupt, so viel man kann, kleine Winkel vermeiden, wie wir auch hernach noch sagen werden.

Fünfter Abschnitt.

Anwendung der erklärten Grundsätze auf die Auflösung der Triangel.

§. 80.

Schon im dritten §. sagten wir, daß in der Trigonometrie die ganze Kunst darin bestünde, daß man die Sinus der gegebenen Winkel (welche, wie wir gesehen

haben, für die Winkel gesezt werden) mit den gegebenen Seiten so in eine Gleichung bringt, daß der vierte Terminus entweder eine Seite, oder einen Sinus (oder Cosinus, oder Tangens) des gesuchten Winkels giebt. Diese Auflösungen finden bey rechtwinklichten Triangeln wenig Schwierigkeit, da fast stets ein Glied in dem Verhältnisse der Sinus totus oder Radius ist, dessen Logarithme beym Rechnen im Addiren oder Subtrahiren keine Mühe macht, indem die ganze Sache in Addition oder Subtraktion der 10 bestehet. Wir wollen daher in der folgenden Tabelle alle Fälle anführen, die bey rechtwinklichten Triangeln vorfallen können, und annehmen, daß A den rechten Winkel anzeige, B und C die übrigen. Die erste Columne soll anzeigen, was ausser dem rechten Winkel A, der stets bekannt ist, als gegeben angenommen werde; die andere wird die zu suchende Theile angeben, und die dritte die Gleichungen für einzelne von ihnen in sich enthalten, die man, wenn man die Logarithmen der Glieder gebraucht, in arithmetische Proportionen umsezzet.

§. 81. (Sieh. Fig. 12.)

	Gegebene Theile.	Zu finde.	Gleichungen.
I	AB, AC	BC	$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$, oder AB : AC = R : tang. B.
			Hiernächst sin. B : R = AC : BC.
II		B	AB : AC = R : tang. B.
III		C	AC : AB = R : tang. C.
IIII	AB, BC	AC	$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$, oder Log. AC = $\frac{1}{2}$ Log. (BC + AB) + $\frac{1}{2}$ Log. (BC — AB).
V		B	BC : AB = R : cos. B.
VI		C	BC : AB = R : sin. C.
VII	AC, BC	AB	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$, oder Log. AB = $\frac{1}{2}$ Log. (BC + AC) + $\frac{1}{2}$ Log. (BC — AC).
VIII		B	BC : AC = R : sin. B.
VIIII		C	BC : AC = R : cos. C.
X	AB, B	AC	R : tang. B = AB : AC.
XI		BC	cos. B : R = AB : BC.
XII	AB, C	AC	R : cotang. C = AB : AC.
XIII		BC	sin. C : R = AB : BC.
XIIII	AC, B	AB	R : cot. B = AC : AB.
XV		BC	sin. B : R = AC : BC.
XVI	AC, C	AB	R : tang. C = AC : AB.
XVII		BC	cos. C : R = AC : BC.
XVIII	BC, B	AB	R : cos. B = BC : AB.
XVIIII		AC	R : sin. B = BC : AC.
XX	BC, C	AB	R : sin. C = BC : AB.
XXI		AC	R : cos. C = BC : AC.

§. 82.

Alle diese Gleichungen sind nichts anders, als eine Anwendung des zweyten Zusatzes im 68. §. beym ersten Lehrsatze. Bey der ersten Gleichung, nemlich $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$, wo zwey Catheten und kein Winkel gegeben wird, ist die Formel auf zwey andere Gleichungen reducirt, um die Ausziehung der Quadratwurzel zu vermeiden. Die Formel $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$ (Nr. III.) ist auf Logarithmen angewendet. Denn da $(BC + AB) \times (BC - AB) = BC^2 - AB^2$, und $\sqrt{BC + AB} \times \sqrt{BC - AB} = \sqrt{BC^2 - AB^2}$, so können die Logarithmen gebraucht werden, nur statt der Wurzeln gebrauche man die Hälften der Logarithmen, wie man aus dem, was wir in der Algebra von den Logarithmen gesagt haben, siehet. Eben dieses gilt von der VII. Formel. Es wird genug seyn, die erste Formel, die in Gleichungen gebracht ist, durch ein Beyspiel deutlich zu machen.

Es sey (Fig 12.) die Seite $AB = 658,5'$; die Seite $AC = 983'$ und man habe die Hypotenuse BC zu suchen.

Log. AC + Log. R = 12,9925535
Log. AB = 2,8185558

Log. tang. B = 10,1739977
Log des nächst kleinern tang. = 10,1737408, der zu 56° 10′ gehört.
Differenz = 2569

Die

Die Differenz des Log. tang. 56° 11′ und 56° 10 = 2732, daher 2732 : 2569 = 60″ : x, man findet so x = 56″; daher ist der Winkel B = 56° 10′ 56″.

Um den Logarithmen von dem Sinus der zu diesem Winkel gehört, zu erhalten, schreibe man

Log. 56° 11′ = 9,9195083
Log. 56° 10′ = 9,9194237

die Differenz = 846; man sage nun 60″ : 56″ = 846 : x, so findet man x = 789, und addirt man dieses zu dem Logarithmen von dem Sinus 56° 10′ = 9,9194237, so ist Logarithm. vom Sin. B = 9,9195026.

Für die andere Gleichung nehme man an.

Log. AC + Log. R = 12,9925535
Arithm. Complem. des Logarithm. vom
sin. AB = 10,0804974

Summe = 23,0730509.

Man ziehe 20 ab, so erhält man den Logarithmen der Seite BC = 3,0730509, wozu zunächst 1183,2 gehöret. Daher kommt die Seite BC zunächst = 1183,2′.

§. 83.

Um die übrigen schiefwinklichten Triangel aufzulösen, wollen wir folgende Aufgaben hinzufügen.

Erste Aufgabe. Aus zwey gegebenen Winkeln und einer Seite die übrigen Seiten zu finden.

Auflösung. Da alle Winkel in einem Triangel 180° ausmachen, so erhält man bey zwey gegebenen Winkeln auch den dritten. Daher kann man sagen: Wie der Sinus des, der bekannten Seite entgegenstehenden, Winkels zu der bekannten Seite selbst sich verhält, so verhält sich der Sinus des, der zu findenden Seite entgegenstehenden, Winkels zu der zu findenden Seite selbst. Hat man eine Seite, so wird eben diese Gleichung die andere bald geben.

Exempel. Es sey in dem Triangel ABC (Fig. 13.) die Seite AC = 684′, der Winkel A = 37° 24′, B = 29° 15′ und die Seite AB werde gesucht. A + B wird = 66° 39′ seyn, folglich C = 180° — 66° 39′ = 113° 21′; weil aber der Sinus des stumpfen Winkels dem Sinus des mit ihm auf einer geraden Linie neben ihm stehenden spitzigen Winkels gleich ist, hier = 66° 39′, so wird man den Sinus von 66° 39′ nehmen müssen, und die Gleichung wird seyn sin. B : AC = sin. C (= 66° 39′) : AB, folglich

Log. AC = 2,8350561
Log. sin. C = 9,9628904

Summe = 12,7979465
Log. sin. B = 9,6889723

Log. AB = 3,1089742. Diesem kommt 1285,2′ am nächsten. Folglich ist AB = 1285,2′.

§. 84.

Zweyte Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten und dem einer von ihnen entgegenstehenden Winkel den der andern gegebenen Seite entgegenstehenden Winkel zu finden.

Auflösung. Um diese Aufgabe aufzulösen, muß man wissen, ob der gesuchte Winkel stumpf oder spitzig sey, welches man gewönlich aus Nebenumständen erfährt. Die Gleichung ist: Wie die dem gegebenen Winkel überstehende Seite sich zu dem Sinus des gegebenen Winkels verhält, so verhält sich die andere gegebene Seite zu dem Sinus des zu findenden Winkels.

Exempel. Es werde in eben dem Triangel ABC die Seite AC = 684′, die Seite AB = 1285,2′ gegeben. Der Winkel B = 29° 15′, man suche den Winkel C. Die Gleichung wird seyn, Seite AC : sin. B = Seite AB : sin. C.

Log. sin. B = 9,6889723
Log. AB = 3,1089742
Compl. des Log. AC = 7,1649439

Summe des Log. sin. C = 9,9628904 (wenn man nehmlich 10 davon nimmt). Es gehöret derselbe zu 66° 39′ wenn er spitzig ist; ist er aber stumpf, wie er es wirklich hier ist, so ist er = 113° 21′.

§. 85.

Dritte Aufgabe. Wenn zwey Seiten mit einem Winkel, der einer von ihnen entgegen stehet, gegeben werden, die dritte Seite zu finden.

Auflösung. Zuerst suche man durch die vorhergehende Aufgabe den Winkel, der der andern gegebenen Seite entgegenstehet. Hat man diesen gefunden, so suche man, zum andern, die Seite durch folgende Gleichung. Wie sich verhält der Sinus des gegebenen Winkels zu einer der gegebenen Seiten die ihm entgegen stehet, so verhält sich der Sinus des dritten Winkels zur dritten Seite.

Exempel. Wenn in dem Triangel ABC mit dem Winkel B die Seiten AC und AB gegeben werden, die dritte Seite CB gesucht wird, so suche man durch die vorhergehende Aufgabe zuerst den Winkel C, und man wird alsdenn auch den Winkel A erhalten. Daher wird sin. B zur Seite AC = sin. A zur Seite CB.

Log. AC = 2,8350561
Log. sin. A = 9,7834575

Summe 12,6185136
Log. sin. B = 9,6889723

Log. CB = 2,9295413, diesem kömmt 850,2′ am nächsten zu.

§. 86.

Vierte Aufgabe. Wenn zwey Seiten und der Winkel, den sie einschliessen, gegeben ist, die andern beyden Winkel zu finden.

Auflösung. Man sezze: Wie sich die Summe der gegebenen Seiten zu ihrer Differenz verhält, so verhält sich auch der Tangens der halben Summe der zu suchenden beyden Winkel zum Tangens ihrer halben Differenz. Wird ein Winkel gegeben, so wird auch die ganze und halbe Summe der übrigen gegeben, und weil die grössere Seite stets dem grössern Winkel; die kleinere aber dem kleinern Winkel entgegenstehet, so weiß man auch, welcher Winkel von beyden der größte und kleinste sey. Addirt man aber die halbe Differenz zur halben Summe, so kommt der grössere Winkel heraus; der kleinere hingegen wird erhalten, wenn man die halbe Differenz von der halben Summe abzieht. Daher erhält man beyde Winkel.

Erem=

Exempel. Im vorigen Triangel ABC sey AC = 684′, BC = 850,2′, C = 113° 21′. Sein Supplement (oder die Summe der beyden andern Winkel) ist also 66° 39′.

AC + BC = 1534,2′ (die Summe beyder Seiten)

BC — AC = 166,2′ (die Differenz der Seiten)

A + B = 66° 39′ (die Summe der beyden zu suchenden Winkel)

$\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B = 33° 19′ 30″ (die halbe Summe der beyden zu suchenden Winkel).

Log. (BC — AC) = 2,2206310

Log. tang. ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) = 9,8178971

Summe = 12,0385281

Log. (AC + BC) = 3,1858820

also die Diff. des

Log. tang. ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) = 8,8526461. Diesem gehört am nächsten der Winkel 4° 4′ 27″ zu. Addiren wir diese halbe Differenz zur halben Summe 33° 19′ 30″, so erhält man den grössern Winkel A = 37° 23′ 57″, und zieht man von der halben Summe dieselbe halbe Differenz ab, so erhält man den kleinern Winkel B = 29° 15′ 3″. Diese Winkel differiren von den oben (§. 83.) angenommenen Winkeln nur um 3″.

§. 87.

Anmerkung. Wer die Auflösung dieser Aufgabe nach den §. 75. gelehrten Gleichungen vornehmen will, der wird vor allen zuerst die Gleichung setzen: die kleinere Seite AC verhält sich zur grössern Seite BC wie R zu tang. des Winkels, von dem 45° abzuziehen sind.

Log. R + Log. BC = 12,9295413
Log. AC = 2,8350561

Log. tang. = 10,0944852, diesem gehört zunächst der Bogen von 51° 11′ 2″ zu, ziehet man 45° ab, so bleibt der Winkel von 6° 11′ 2″ übrig. Die andere Gleichung wird hiernächst seyn R : tang. (6° 11′ 2″) = tang. ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) : tang. ($\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B).

Log. tang. (6° 11′ 2″) = 9,0348298
Log. tang. ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) = 9,8178971

Hiervon 10 (aus der Charakteristik) abgezogen, so bleibt Log. tang. ($\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$B) = 8,8527269 übrig. 18,8527269

Dazu gehört der Winkel 4° 4′ 29″, daher ist A = 37° 23′ 59″, B = 29° 15′ 1″, welche Winkel von den angenommenen nur um 2″ unterschieden sind.

§. 88.

Fünfte Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu finden.

Auflö-

Auflösung. Man findet die Auflösung dieser Aufgabe, wenn man durch die vorige die übrigen beyden Winkel suchet, alsdenn kann man sie nach der ersten Aufgabe behandeln, wie es sich von selbst verstehet.

§. 89.

Sechste Aufgabe. Aus drey gegebenen Seiten die Winkel zu finden.

Auflösung. Man nehme an: wie die grösste Seite zur Summe der beyden andern, so ihre Differenz zur Differenz der Abschnitte der Segmente der grösten Seite, welche alsdenn entstehen, wenn ein Perpendikel aus dem, der grösten Seite entgegenstehenden, Winkel auf sie gezogen wird. Hat man die Differenz der Abschnitte HB (Fig. 13.), so wird man auch die einzelnen Abschnitte $AE = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} HB$, und $EB = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} HB$ erhalten. Auf diese Art ist der Triangel ACB auf zwey rechtwinkelichte reducirt, wo in dem einem ACE, AE und AC, und in dem andern ECB, CB und EB gegeben ist. Daher kann man nach der fünften Formel im 81 §. hier die Gleichung machen $AC : AE = R : \text{cos. } A.$ Nach eben der Formel, $CB : EB = R : \text{cos. } B.$ Hat man die Winkel A und B, so ist auch der dritte C bekannt.

§. 90.

§. 90.

Anmerkung. Ueberflüssig wäre es, den Beweis der Auflösungen dieser Aufgaben zu wiederhohlen, da in denselben nichts enthalten ist, was nicht schon in dem vorigen Abschnitte bewiesen wäre. Der Anfänger muß aber bemerken, daß in verschiedenen Auflösungen einiger Unterschied statt finde, und man durch die Trigonometrischen Rechnungen nicht zur höchsten Genauigkeit kommen könne. Am meisten muß man diejenigen Auflösungen meiden, wenn es anders möglich ist, wo sich solche Logarithmen, die man durch Gleichungen sucht, häufen, ingleichen Logarithmen, die zu sehr kleinen Winkeln gehören, ob gleich dieses nicht immer einen Unterschied giebt. So ist die Auflösung nach §. 86 der vierten Aufgabe so genau nicht gewesen als die andere §. 87. Und da man in jener die Logarithmen der Zahl 1534,2′ und des Tangenten 33° 19′ 30″, von welchen keiner in den kleinen Tafeln genau enthalten ist, sondern durch eine Gleichung gesucht werden mußte, gebraucht hat, so konnte man leicht sehen, daß daraus der Grund eines Unterschiedes in Absicht der Genauigkeit herzunehmen sey. Aber auch durch Hülfe grösserer Tafeln (worinn man die Logarithmen der iezt genannten Grössen hat) kommt man der Wahrheit nicht näher. Bey der

andern

andern Auflösung ist doch der Logarithme vom Sinus totus ganz genau da, ob man gleich den Tangens des kleinen Winkels = 6° 11′ 2″ gebraucht, und man kommt der wahren Grösse sehr nahe. Man siehet hieraus deutlich, daß selbst ein Unterschied unter den Logarithmen in den Tafeln statt findet.

Zwey-

Zweytes Capitel.

Ausübung der ebenen Trigonometrie.

Erster Abschnitt.

Von der Ausmessung der Grundlinien.

§. 91.

Weil aus blossen gegebenen Winkeln nichts als nur das Verhältniß der Seiten herausgebracht werden kann, so muß wenigstens eine Seite des Triangels gegeben, oder **wirklich** gemessen werden, wenn eine bestimmte Grösse gesucht werden soll. Es findet sich aber zuweilen, daß der Boden so beschaffen ist, daß man zwischen den bestimmten Grentzen der zu messenden Seite aus gewissen dazwischen liegenden Stellen, die Grentzen selbst nicht sehen kann, so wie, wenn die Linie ABCEF (Fig. 16.) zu messen wäre, und sich zwischen B und C, oder bey E eine solche Vertiefung des Bodens befände, daß man von da aus die Grentzen A und F nicht sehen könnte.

Wenn dies der Fall ist, so muß man die Meßstäbe aussetzen, und mit denselben durch diese Oerter hindurch eine gerade Linie bezeichnen. Aus einigen zwischen den Grentzen liegenden Stellen, als z. B. aus C, D muß man

wenigstens die Grentzen sehen können. Zu dem Ende lasse man seinen Gehülfen mit einem geraden Meßstabe, welcher rund und unten spitzig ist, von A nach der Grentze F zugehen, in B (welcher Ort aus der niedrigen Gegend, die zwischen B und C liegt, überall gesehen werden kann) stillstehen, und da den Meßstab in die Erde perpendikulair einstekken (welches man vermittelst eines Bleiwurfs erreicht); bey A aber bleibe man stehen, damit der Stab B die Grentze F dekke, wenn man mit dem Auge nach F siehet. Ein anderer Stab, den man auf gleiche Art zwischen B und C sehen kann, muß in C auf gleiche Weise unter gleicher Direktion befestiget werden, indem man ihm aus A die gehörige Richtung giebet. Wenn es nöthig ist, so befestiget man ferner dergleichen Stäbe in D und E, aber so, daß man aus allen Vertiefungen immer zwey Stäbe sehen kann, und daß man stets unterhalb des gestekten neuen Stabes gegen den andern und auf die Grentze siehet, damit man auf keiner Seite von der geraden Linie abweicht. Bey kleinen Entfernungen bedarf man dieser Einrichtung zwar nur selten, hat man aber grosse Grundlinien zu messen, so hat man es oft nöthig.

§. 92.

Man nimmt darauf die Meßung selbst vor, welches auf verschiedene Art geschehen kann. Gewönlich nimmt man, wenn es nicht auf die höchste Genauigkeit angesehen

hen ist, gewisse zu dieser Absicht eingerichtete Ketten, die aus Stükken von etwas starken Eisendrathe, deren jedes einen ganzen oder einen halben Fuß lang ist, und mit Ringen verbunden sind, zusammengesezt sind, so daß stets nach sechs Füssen sich ein Ring von Meßing befindet, damit sowol die Klafter als die Füsse selbst geschwind gezählt werden können. Der erste Ring an der Kette wird mit einem langen eisernen Nagel der in A eingestochen wird, oder mit einem starken hölzernen Stabe, der in die Erde getrieben wird, befestigt. Der Gehülfe nimt das andere Ende der Kette, und gehet gegen F (Fig. 17.) zu, indem man in A zurükbleibt, er dehnet darauf die Kette, so viel als möglich ist, aus, stekt darauf den andern Ring am Ende der Kette mit einem ähnlichen Stabe oder Nagel in B ein, indem man dabey stets nach den Punkt nach F hinsieht und seinen Gehülfen zurechtweiset, damit die ganze Kette auf der geraden Linie zu liegen kommt.

Nachdem der Andere das Ende der Kette in B so befestigt hat, wie es seyn muß, so zieht man den Stab oder Nagel in A heraus, und gehet nach C hin, wo man eben das thut, was der Andere in B gethan hatte, welcher nach F sehen und die Abweichung der Kette BC von der geraden Linie verhüten muß. Eben so trägt der Andere das andere Ende der Kette hernach von B nach D, und so weiter, bis man nach F kommt. Selten wird es sich zutragen, daß nicht die Kette, wenn man

nach F kömmt, sich etwas über F hinaus erstrekken, oder an F fehlen lassen, und daß dieser Unterschied sich nicht auf einen ganzen oder halben Fuß (welche auf der Kette angezeigt sind) erstrekken sollte. Deswegen muß man ein anderes Maaß, z. B. einen in ganze oder halbe Zolle getheilten Fuß bey der Hand haben, damit man jenes Stück FE, das über die Grentze hinausgehet oder daran fehlet, messen kann. Wenn man bemerkt, wie oft das andere Ende der Kette übergetragen ist, so wird die Zahl der Klafter, der Füsse und der Zolle der Weite, oder der Grundlinie AF sich ergeben.

§. 93.

Die Meßketten enthalten selten mehr als 5 oder 6 Klafter, damit sie nicht durch ihre Schwere und Gewicht beschwerlich werden. Beym Gebrauch muß man vorzüglich dahin sehen, daß, 1) sie nicht, wenn sie zu wenig angezogen werden, merkliche Bogen und Beugungen machen, die, wenn man sie nicht bemerkt, eine grössere Entfernung, als wirklich da ist, angeben. 2) Daß nicht durch zu starkes Anziehen die hölzernen Stäbe oder Nägel, womit das andere Ende der Kette befestigt ist, aus ihrer Stelle getrieben, oder herübergezogen, oder die Ringe lang gezogen werden, und also die Kette länger wird. Durch beydes würde die Grundlinie kürzer als sie ist gefunden worden, 3) Vor dem Gebrauch der Meß-

kette muß man das erste und lezte Klafter der Kette untersuchen, ob man nemlich von dem Mittelpunkte des Stabes, den man in den äuersten Ring stechen muß, die Rechnung anzufangen habe, oder nicht. Findet das erstere nicht statt, so muß man, so oft man die Kette überschlägt, die Länge etwas berichtigen, je nachdem nemlich vom äuersten Rande des Ringes, oder von seiner innern Seite an die Rechnung gemacht ist. 4) Wenn die Kette ausgezogen wird, muß man zusehen, ob alle Ringe in ihrer gehörigen Lage und Ordnung sich befinden, indem es sich leicht zutragen kann, daß sie untereinander verwikkelt sind, und die Kette dadurch kürzer wird.

§. 94.

Da man bey der Meßkette sehr sorgfältig zu Werke gehen muß, so kann man sich ihrer nicht mit völliger Sicherheit bedienen. Denn selten ist der Boden so eben, daß eine über demselben ausgespannte Kette nicht Beugungen und Bogen von Bedeutung bekommen sollte. Es kommt noch hinzu, daß bey einer etwas starken Anziehung der Kette die eisernen Nägel oder Stäbe leicht um etwas übergezogen werden, oder, wenn die Erde ausweicht, aus ihrer gehörigen Lage kommen, gesezt auch, daß sich die Ringe nicht biegen. Die Beugungen und Senkungen, welche vornemlich die Schwehre hervorbringt, kann man nicht einmahl bey Seilen, die in Oehl

gedörrt, und in geschmolzenes Wachs getaucht sind (um das Einziehen in der Nässe zu verhindern), genug vermieden werden, geschweige denn das Ausweichen der Stäbe oder Nägel. Deswegen darf man sich bey der Ausmessung der Grundlinien in diesem Falle weder der Ketten noch der Seile bedienen.

§. 95.

Einige gebrauchen bey der Ausmessung der Grundlinien einen einzigen Meßstab, wie (Fig. 18.) ABCD, und schlagen ihn nach cdab über, indem sie ihn um den Winkel D drehen (so, daß das andere Ende einen halben Cirkel zu beschreiben scheinet), und hernach so weiter. Indem aber der Meßstab auf diese Art gebraucht wird, so siehet man, daß, wenn EF einen Quadranten beschrieben hat, DC auf Dc auf dem Boden komme, und daß der übrige Bogen durch Umdrehung um den andern Winkel C, welcher schon auf dem Ort c seyn wird, beschrieben werde. Daher muß man so oft als man den Meßstab überschlagen hat, seine Dikke noch hinzuaddiren, nemlich AB oder DC. Man kann aber auch ziemlich von der geraden Linie, nach der Grentze hin, abweichen. Hiernächst kann man auch nicht hoffen, daß die Erde nicht weichen sollte, wenn der Meßstab um die Winkel D und C gedrehet wird, so daß man daher nicht allezeit die Dikke des Meßstabes zur Linie wird hinzurechnen dürfen, sondern

dern bald mehr bald weniger, je nachdem der Boden mehr oder weniger auf diese oder jene Seite ausweicht.

§. 96.

Viel besser gebraucht man dafür solche Meßstäbe, die lang und rund, aber nicht zu biegsam und fast von 10 Fuß sind, und nimt wenigsten drey bis vier solcher Stäbe. Man legt sie (Fig. 17.) von A nach F in einer geraden Linie hin, so daß stets zwey und zwey genau am Ende aneinander stossen, der Boden muß nur eben genug seyn, damit man, wenn kleine Unebenheiten oder Furchen vorkommen, mit untergelegten Keilen und kleinen Stükken von Latten die horizontale Lage der Meßstäbe durch das Augenmaaß erhalten könne. Nachdem man drey oder vier in AB, BC, CD u. s. w. auf die Art hingelegt hat, daß, wenn man von A nach F siehet, sie alle in gerader Linie erscheinen, so nimt man den Meßstab AB hinweg, indem man ihn nach A zu wegzieht, damit er nicht an BC stößt, und es aus seiner Lage bringt, und bringt ihn nach DE hin, faßt aber D mit der Hand fest an, damit nicht der Stab CD aus seiner Lage gerükt werde, wenn man DE hinlegt. Hierauf nimt man den andern BC eben so weg, und legt ihn an DE in einer geraden Linie an, und fährt so fort, bis man die Grentze erreicht hat. Bedient man sich beym Messen vierer Stäbe, so können die beyden vördersten, die gegen die Grentze, wohin man mißt, zu

liegen, unbeweglich liegen bleiben, die andern beyden, die hinten liegen, zugleich aufgenommen und fortgetragen werden. Das versteht sich schon, daß man einen besondern kleinen Maaßstab zur Hand haben muß, der in Füsse, Zolle auch in Linien getheilt ist, oder man müßte diese Eintheilung schon auf einem von den Meßstäben haben, damit man auch das auf der Grundlinie messen könne, was keinen ganzen Meßstab oder nur einige Fuß beträgt.

§. 97.

Die Messungen, die so angestellt sind, sind viel genauer als die, welche man mit Ketten verrichtet. Nur darauf muß man besonders Achtung geben, daß die Meßstäbe genau aneinander stossen (denn geschieht das nicht, so entsteht ein beträchtlicher Fehler), und ihre Lage so horizontal als möglich ist, welches auf einem abschüßigen oder unebenen Boden, wie wir schon gesagt haben, durch untergelegte Keile oder andere Unterlagen erhalten wird, wovon wir bald noch etwas erinnern werden. Der Fehler der alsdann entstehet, wenn man von der geraden Linie abweicht, ist gewönlich so klein, daß er nur in grossen Weiten merklich wird. Denn nimt man an, daß der 10füßige Meßstab AB (Fig. 24.) von der wahren Linie ACD um den Winkel BAC, dessen Sinus BC (wenn ich AB zum Radius annehme) und = 1 Zoll ist, abweicht (ein solcher Fehler fällt aber so leicht in die Augen, daß

man

man ihn nur einer Nachläßigkeit zuschreiben kann, wenn er begangen wird), so nimt man die Länge AC für 10 Fuß an, deswegen wird der Fehler seyn AB — AC. Es ist aber AB (wie wir es dafür angenommen haben) $=$ 10′ $=$ 120″, und BC $=$ 1″, daher wird AC seyn $=$ $\sqrt{AB^2 - BC^2}$, $= \sqrt{14400 - 1} = \sqrt{14399}$, welche 119,995″ sehr nahe kommt, und der Unterschied zwischen AB ($=$120″) $= \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$″. Man siehet daraus, daß wenn man sich nur in der Lage einzelner Meßstäbe um so viel versiehet, man bey einer Weite von 200 zehnfüßiger Stäbe, oder 2000′ nur um 1″ von der wahren Linie abweicht, obgleich alle Fehler von einerley Art sind, daß sie nemlich die Entfernung grösser als sie ist, angeben, wie die Figur selbst anzeigt. Weicht man nicht allein von der Linie ACD (Fig. 25.), sondern auch von der Horizontallinie ab, so wird ein solcher Fehler zwar etwas gröser, aber doch an sich selbst klein seyn. Man nehme an, die Abweichung von der Linie AD sey EC $=$ 1″, und von der Horizontallinie BE auch $=$ 1″, so wird bey dem einem Meßstabe von 10′ AB der Fehler $=$ BC der Hypotenuse des rechtwinklichten Triangels seyn, dessen Catheten BE und CE von 1″ sind und BC daher $= 1 \times \sqrt{2}$, wie man leicht siehet. Deswegen wird nach unserer Voraussetzung AC $= \sqrt{14400} - 2 = \sqrt{14398} =$ 119,991 und die Differenz von 120 wird fast $\frac{2}{1000}$″ betragen, dies beträgt,

trägt, wenn der Fehler bey einer Weite von 111 Meßstäben, deren jeder 10 Fuß enthält, bey einem jeden Stabe auf einerley Art begangen wird, folglich bey 1110 Fuß fast einen Zoll. Hieraus läßt sich abnehmen, daß man von dergleichen Fehlern nichts sonderliches zu fürchten habe.

§. 98.

Es trägt sich zuweilen zu, daß der Boden an einem Orte auf einmahl abschüßig wird, wenn er auch sonst eben ist, wie die 19. Figur zeiget. In diesem Falle lege man den Meßstab auf dem erhabenen Theile des Bodens auf die gehörige Art aus (man kann auch, wenns nöthig ist, eine Unterlage E darunter anbringen), oder wenn einer zu kurz ist, so befestige man zwey aneinander, damit die Seite B über den Abschuß herüber rage. Darauf lasse man von dem Ende B ein Perpendikel oder Bleiwurf BC herabfallen, und bringe an dasselbe auf dem niedrigern Theile des Bodens den Meßstab CD, sezze auch, wenn es nöthig ist, bey F eine Unterlage darunter. Wenn man dies thut, so muß man zur Länge der Meßstäbe noch die Dikke des Fadens BC addiren, wenn sie etwas beträgt, und zwar so oft, als man das Perpendikel auf diese Art gebraucht, welches, wenn die Ebenheit des Bodens oft unterbrochen wird, oft geschehen kann. Wenn man aber gewöhnliche Messungen der Grundlinien vornimt, und der Faden sehr dünn ist, man auch das Senkbley

bley nicht oft gebraucht, so darf man es nicht in Anschlag bringen, da zumahl in solchen Fällen andere Fehler, die von der Unvollkommenheit der Instrumente herrühren, fast unvermeidlich sind, und doch mehr auf sich haben.

§. 99.

Diese Arten nun, Grundlinien zu messen, sind zu den gewönlichen trigonometrischen Arbeiten hinlänglich genug. Wird aber die größte Genauigkeit erfordert, als wenn grosse Grundlinien von fünf oder sechstausend Klaftern (30,000 oder 36,000 Fuß), um die Länge eines Grades im Meridian auf der Erdkugel zu finden, oder um eine genaue geographische Charte zu verfertigen, gebraucht werden, so gebraucht man andere Meßstäbe, die wenigstens drey Klafter lang, hiernächst dikk sind, damit sie sich nicht biegen, und so gerad als möglich. Man verfertigt sie aus ganz trokkenem Holtze, und zwar nicht aus einem Stükke, sondern nachdem ein Stamm in mehrere Theile zerspaltet ist, so werden zwey oder drey solche Theile durch hölzerne Nägel und guten Leim zu einem Stükk verbunden, und zwar so, daß die Fibern in den einzelnen Stükken eine entgegengesetzte Lage bekommen, wodurch man das erhält, daß die Stäbe, die auf diese Art zusammengesetzt sind, sich in der Folge nicht verwerfen, welches man bey solchen, die aus einem einzigen Stükke gemacht werden, selten vermeidet. Ausserdem werden sie mit Oehl-

farbe

farbe stark überstrichen, damit sie durch die Näſſe keinen Schaden leiden. Auf einer von den vier ebenen Seiten (Fig. 20) werden kleine meßingene Bleche an den Stellen befestigt, wo eine Länge von einem Klafter sich endiget, als z. B. bey B dicht am Ende, hiernächst in C und so hernach bis zum andern Ende. Die Längen der einzelnen Klafter werden mit Hülfe eines grossen Cirkels, der mit einem Mikrometer versehen ist (wovon ich in der Geometrie geredet habe) von einem Bleche auf das andre getragen, und auf einem jedem mit einem feinen Punkte bezeichnet, den man mit einem spitzigen Instrumente darauf macht. Diese Meßstäbe pflegen einige auf niedrige aber starke Tischgen zu legen, die zu dieser Absicht gemacht sind, und nachdem es nöthig ist, höher und niedriger gemacht werden können. Entweder nimt man zu einem Meßstabe stets zwey solche Tischgen, oder setzt unter zwey aneinander liegenden Stäben eins. Um die horizontale Lage genau zu erhalten, bringt man an einem jedem Meßstabe eine Wasserwage an (Fig. 22.), nemlich eine gläserne Röhre, die in einer andern meßingenen so eingeschlossen ist, daß man in dem Raume DE das Glas sehen kann. In der gläsernen Röhre ist Wasser mit einer etwas grossen Luftblase befindlich, und um ihrer Mitte befindet sich ein feiner Ring I. Die meßingene Röhre CDEF wird auf ein meßingenes Lineal AB gelötet, an dessen beyden Enden Dioptern GA und HB angebracht sind, welche

mit

mit Faden versehen sind, die sich durchschneiden. Kömmt die Luftblase in der Mitte der gläsernen Röhre zu stehen, so steht das Lineal AB horizontal, und folglich auch der Meßstab mit dessen Fläche dieses Lineal gleich gehet. Andere gebrauchen zu dieser Absicht einen grossen höltzernen Triangel ABC (Fig. 23.), der so gleichschenklicht, als möglich ist. Bey B wird ein Senkbley aufgehängt, welches sich in einem höltzernen Futterale BF, dessen obere Seite ein Glas hat, befindet. In der Mitte des hölzernen Queerarmes DE (welcher DB = BE machen muß) wird ein Punkt angemerkt, welchen der Faden, wenn er perpendikulair hängt, dekt, indem die Füsse A und C horizontal stehen. Durch Hülfe dieses Triangels erhält man die horizontale Lage des Meßstabes. Die auf ihren Tischen ordentlich ausgelegten Meßstäbe treffen nicht zusammen, sondern zwischen den an den Enden befindlichen Blechen bleibt immer noch einiger Zwischenraum. Diesen muß man mit einem kleinen Cirkel oder Mikrometer oder einem andern, der genau ist, aufnehmen, indem man ihn an die Punkte, die auf den Blechen angemerkt sind, ansezzet, und den gefundenen Raum hernach nach einem Stabe abmißt. Man schreibt daher so oft, als man drey oder vier Meßstäbe ordentlich gelegt hat, den zwischen zwey und zwey gefundenen Raum auf, und zählt ihn hernach mit zu den ganzen Klaftern hinzu. Darauf trägt man die hintersten Stäbe vor die vordersten, die man hat

liegen

liegen lassen, hin, und setzt so die Messung fort, bis man die Grentze erreicht hat.

§. 100.

Wenn man die Meßstäbe von einem Orte zum andern trägt, so muß man Acht haben, daß sie nicht umgekehrt werden, das heißt, daß die Seite, die vorher zu der Grentze hin gerichtet war, nach welcher man hinmißt, hernach nicht nach der Seite hin zu liegen komme, von welcher man hermißt, sondern daß die Enden der Meßstäbe stets eben dieselbe Richtung bekommen, die sie im Anfang hatten. Man kann dies leicht erhalten, wenn man das Ende dieser Stäbe mit Buchstaben bezeichnet. Weil man die ganze Messung nicht immer an einem Tage vollenden kann, und sie auch oft anderer Ursachen wegen muß unterbrochen werden, so muß man, damit man wissen möge, wie weit man gekommen sey, von dem äussersten Ende der lezten Meßstange einen Bleywurf fallen lassen, und unter demselben einen hölzernen Stab oder grossen eisernen Nagel, auf dessen Oberfläche ein Blech mit einem eingeschnittenen Striche ist, in die Erde fest einschlagen, und zwar so, daß das Perpendikel gerade auf den eingeschnittenen Strich stoßt. Wenn man die Messung wieder vornimt, so muß ein Perpendikel, welches man vom ersten Ende des ersten Meßstabes fallen läßt, eben diesen Strich berühren, wie sich dies schon von selbst verstehet.

Uebri=

Uebrigens gebraucht man auch hier das Senkbley auf dieselbe Art, wie wir oben (§. 98.) gelehrt haben, wenn etwa der Boden abhängig seyn, oder Graben in demselben, und dergleichen mehr seyn sollte.

§. 101.

Gebraucht man noch grössere Meßstangen von 5 bis 6 Klaftern (30 bis 36 Fuß), die ihres Gewichts und Grösse wegen sich nicht so leicht durch einen unversehenen Stoß aus ihrer Lage bringen lassen, so legt man sie auf dem Boden aus. Weil ihre Auslegung nach einer geraden Linie zwischen zwey Grentzen sehr beschwerlich ist, so wird nach dieser Linie ein Seil, welches man an einem in die Erde fest eingeschlagenen Pfahle befestigt, ausgespannt, entweder mit Hülfe der Walze in einer Winde, oder durch eine andere Maschine, die man leicht anschaffen kann, und legt nach dem Striche, den das Seil nimt, die Meßstäbe aus, wodurch die Arbeit sehr verkürzt wird. Um die horizontale Lage zu erhalten, bedient man sich der Keile, Lattenstükke und anderer Unterlagen, gebraucht dann auch bey einem jedem Meßstabe die Wagen. Da diese Meßstäbe durch ihr eigenes Gewicht zu fest auf dem Boden anliegen, als daß sie ein leiser Stoß sollte verrükken können, so läßt man zwischen ihren Enden keinen Raum, den man sonst immer besonders messen müßte (denn dieses erfordert viel Zeit und macht die Rechnung

schwe-

schwerer); sondern man sieht sorgfältig darauf, daß sie genau aneinander stossen. Deswegen macht man an ihre Enden ein Stück Eisen an, welches die Gestalt eines Parallelepipedums hat (Fig. 21.), ziemlich dikk und sehr kurz ist: seine viereckigten Grundflächen müssen auf das genaueste an den Seiten der Meßstäbe perpendikulair stehen, und auf das beste geglättet seyn, damit die eine Fläche von dem einem Eisen ganz die andere von dem andern, da wo sie zusammenkommen, berühre. Wenn auf diese Art auch eine Grundlinie von stausend Klaftern und länger mehrmahls, oder von verschiedenen Personen gemessen wird, so merkt man kaum einen Unterschied von wenigen Linien, wenn man nur die gehörige Sorgfalt dabey gebraucht.

§. 102.

Obgleich diejenigen, die auf diese Art messen, mit mehrern Hülfsmitteln und einer grössern Kenntniß von andern Theilen der Mathematik versehen seyn müssen, als man von Anfängern verlangen kann, so haben wir doch dieses auseinander sezzen wollen, damit sie lernen mögen, woher sie, wenn sie es nöthig haben, die Hülfsmittel hernehmen können. Man kann sich nie an die Genauigkeit zu sehr gewöhnen: kann man sie nicht im höchsten Grade erreichen, so wird man sie doch so weit als möglich verfolgen dürfen. Unterdessen ist es mein Wunsch, daß diejenigen, die sich auf die praktische Trigonometrie beson-

ders

ders legen, einerley Entfernungen zu wiederholten Mahlen, es sey nun mit Ketten oder mit zehnfüßigen Stäben, oder auf eine andere Art messen mögen, ja, wenn der Boden ungleich ist, auf drey bis vier mahl, um nicht allein den Unterschied kennen zu lernen, den man zwischen Messungen, die mit einerley Instrumente gemacht werden, erhält, wenn man sie mehr als einmahl vornimmt, sondern auch um zu erfahren, wie Messungen, die mit verschiedenen Instrumenten vorgenommen werden, voneinander abweichen. Das erstere wird sie lehren, in wie fern man sich auf dergleichen Messungen verlassen könne, und was bey ihnen ungewiß bleibe, damit sie nicht ihre Messungen für untrüglich ausgeben, wie man dieses oft findet. Wenn man z. B. eine Grundlinie, die man mit einer Kette gemessen hat, beym zweyten Messen um $\frac{1}{2}$ Fuß unterschieden findet, so siehet man gleich, daß man um $\frac{1}{2}$ Fuß bey ihr ungewiß sey. Man wird sie daher beym wirklichen Gebrauch, wenn die zweyte Messung sie grösser angegeben hat, um $\frac{1}{4}$ Fuß vergrössern können; gab sie die andere Messung kleiner an, so wird sie um $\frac{1}{4}$ Fuß können kleiner gemacht werden. Fand man sie z. B. das erste mahl $= 228'$, das andere mahl $= 228\frac{1}{2}'$, so wird man die Mittelzahl $= 228'3''$ als ihr wahres Maaß annehmen können. Das andere, daß man nehmlich verschiedene Instrumente gebraucht, um einen Unterschied finden zu können, hat den grossen Nutzen, daß man dadurch eine

Auswahl treffen lernt, und bey Messungen, wo eine grosse Genauigkeit nöthig ist, diejenigen Instrumente wählen kann, die den besten Erfolg zu geben pflegen.

Zweyter Abschnitt.

Von den Instrumenten, mit welchen die Winkel gemessen zu werden pflegen.

§. 103.

Zum Messen der Winkel gebraucht man gewöhnlich das **Astrolabium**, den **Winkelmesser**, oder einen halben Cirkel, der in halbe Grade, oder auch auf 10 und 10 Minuten eingetheilt und mit doppelten Dioptern, in welchen Faden sind, versehen ist. Zwey davon stehen fest, und in der Länge des Diameters von einander, die andern beyden befinden sich auf einem beweglichen Lineale, welches mit seiner Schärfe die Grade, die auf dem Rande des halben Cirkels zwischen den festen Dioptern bezeichnet sind, abschneidet, wenn ein Winkel aufgenommen wird.

Weil dieses Instrument sehr viel gebraucht wird, so verweile ich mich bey seiner Beschreibung nicht, sondern werde zuerst zeigen, wie man es vor dem Gebrauch prüfen, hiernächst, um wie viel man beym Messen der Winkel damit fehlen könne.

§. 104.

Man prüft das Astrolabium auf zweyerley Art. Erstlich untersucht man, ob es genau eingetheilt sey, hiernächst ob sich beym Mittelpunkte der Bewegung des andern beweglichen Diopterlineals kein Fehler finde. Um die befindliche Eintheilung zu untersuchen, muß man das Centrum, welches zu der gemachten Eintheilung der Grade gehört, haben. Hierzu können uns verschiedene Lehrsätze der Elementar Geometrie verhelfen, unter welchen derjenige sich gleich darbietet, daß man aus verschiedenen Punkten des Bogens des Instruments, gleichsam als aus Mittelpunkten, mit dem Radius, der der Sehne von einem Bogen von 60° gleich ist, mehrere kleine Bogen nahe an dem Orte beschreibet, wo man schon weiß, daß das Centrum seyn sollte. Durchschneiden sie sich alle in Einem Punkte, so befindet sich in diesem Durchschnittspunkte das Centrum. Man theile gleichfals den Diameter des Instruments BA (Fig. 26.) in zwey Theile in C. Trifft dieser Punkt die erstern Bogenschnitte, so wird derselbe das wahre Centrum der Abtheilung seyn. Treffen aber weder die Bogenschnitte auf einen Punkt, noch C auf denselben, so kann man schliessen, daß in dem Instrumente ein Fehler stekke. Daher kann man entweder durch eine geometrische Construktion, oder durch einen Bleywurf, den man aus C (dem Mittelpunkte der Linie AB, die durch den Bogen gezogen ist) an einem feinen

Faden auf den halben Zirkel fallen läßt, den Bogen von 90° suchen. Hat man diesen durch Versuche in drey gleiche Theile getheilet, so werden zwey davon einen Winkel von 60° geben, dessen Sehne der Halbmesser seyn wird. Man sezze darauf einen Cirkel in C, und sehe zu, ob mit der Weite des Radius der andere Fuß in die Punkte aller Abtheilungen im ganzen Bogen treffe. Geschieht das nicht, so ist C nicht das Centrum der Abtheilung. Daher muß man alsdann mit der Sehne eines Bogens von 60° aus verschiedenen Punkten der Abtheilung in der Gegend um C Bogen ziehen, die sich durchschneiden, und daraus den Punct C suchen.

Hat man das Centrum und den wahren Radius des Instruments, so sezze man ihn aus A in den Punkt 60°, von 60° in 120°, von 120° in B, und man sehe zu, ob die Punkte in der Abtheilung hiermit übereintreffen. Ist die Abtheilung gleich richtig, so trage man eben diese Sehne von 60° aus 5° in 65°, aus 65 in 125°; auf gleiche Art aus 175° in 115°, aus 115° in 55°. Eben so sehe man zu, ob die Sehne von 30 Grad, wenn man sie in verschiedene Oerter im Bogen trägt, überall eben so viel Grade einnimt. Eben dies erforsche man auch an andern Sehnen. Wenn die Abtheilung auf diese Art richtig zu seyn scheint, daß einerley Sehnen stets die zu denselben gehörigen Grade treffen, so kann man das Instrument behalten; wenn aber die Eintheilung merklich ver-

schieden seyn sollte, so muß man es als fehlerhaft wegthun. Denn es verlohnt sich nicht der Mühe, daß man für so kleine Instrumente, deren Radius selten über 5″ geht, Tafeln zur Verbesserung verfertige.

§. 105.

Es kann kommen, daß die Eintheilung der Grade untereinander gleich ist, und das Centrum der Abtheilung auch auf der Linie BF (Fig. 27.) liegt; aber daß der Bogen des Instruments BKF kein genauer halber Cirkel ist, sondern entweder durch das Stük FG zu groß, oder durch das fehlende gF zu klein sey. In diesem Falle, wo wir annehmen, daß die Eintheilung der Grade gleich ist (denn sonst könnte die Sehne von einer gewissen Zahl Grade, wenn man sie auf verschiedene Theile des Bogens bringt, nicht immer eine und ebendieselbe Zahl bezeichnen), sind alle Grade verhältnißmäßig entweder zu groß oder zu klein. Hier kann man eine Verbesserung anbringen, wenn man nach dem vorigen Syhen das Centrum H, und mit dem Radius BH, den man aus B nach C führt, den wahren sechzigsten Grad bestimmt. Wäre 60° in D angeschrieben, so bringe man sowohl die Sehne BC als auch BD auf eine genaue geometrische Scala, und sage: Wie die Zahl der Theile der Scala, die der ganzen Sehne BC zugehören (welche dem Radius der Abtheilung gleich ist), zu der halben Zahl der Theile, die der Sehne BD zukom-

men, so verhält sich der Sinus totus zum Sinus des in den Tafeln zu suchenden Winkels. Man erhält alsdann den wahren Winkel BHD, und daher das Stük CD, das nach dieser Annahme, den Winkel 60° überschreitet, und welches der dritte Theil von FG ist. Bey einem jedem andern Winkel z. B. BHI, der 42° bezeichnet ist, kann man daher sagen: Wie 180 zu 3CD (oder FG), so 42° zu x, welches als eine Verbesserung zu 42° zu addiren ist. Wäre aber BD und nicht BC der wahre Bogen von 60°, so würde man eben dieses Verhältniß anstellen können, aber die Verbesserung würde durch die Subtraktion des gefundenen Theils angestellt werden müssen. Die Ursach hiervon ist leicht einzusehen, und gründet sich auf die Gleichheit der Eintheilung.

§. 106.

Wenn man in Absicht der Gleichheit der Eintheilung des Instruments und auch des Centrums C (Fig. 28. n. 1.) kein Bedenken mehr hat, so muß man ferner untersuchen, ob das **Centrum der Eintheilung** mit dem **Centro der Bewegung** oder Umdrehung der beweglichen Dioptern eins und dasselbe ist. Man führe dieses Lineal EOH so an den Diameter des Instruments, oder an das feste Lineal AB, daß seine scharfgeschnittene Seite EGO, welche bewegbar ist, mit der gleichfals scharfgeschnittenen Seite AC des festliegenden Diopterlineals AB sich dekke. Auf

der

der scharfen Seite von OE merke man mit einem scharfen Instrumente den Punkt G mit einem feinen Striche oder Punkte an, und zwar so, daß derselbe auf dem ersten Punkt A in der Abtheilung zu liegen komme. Bewegt man nun das bewegliche Diopterlineal um den Mittelpunkt der Abtheilung C, so muß der Punkt G beständig in dem Bogen AGB bleiben, wenn das Centrum der Bewegung mit dem Centro der Abtheilung eines und ebendasselbe ist; ist es aber nicht so, daß etwa d das Centrum der Bewegung sey, und C das Centrum der Abtheilung, so muß der Punkt G vom Bogen des Instruments abweichen, als durchliefe er den Bogen AGF.

Um diese ganze Sache deutlicher einzusehen, merke man: 1) Wenn zwey Bogen, die mit willkührlichen Radiis beschrieben sind, sich in zweyen Punkten schneiden, so befindet sich die größte Entfernung der Bogen in der geraden Linie, welche durch beyder Centrum geht. So haben (Fig. 28. n. 2.) die Bogen BdA, BDA und BδA, deren Centrum sich in K, C, k befindet, auf der geraden Linie Kδ in δD und Dd ihre größte Entfernung: eben so ist die größte Entfernung der Bogen AmH, und AnH (Fig. 28. n. 3.) in mn auf der geraden Linie, die durch die Centra k, C geht. Der Grund hiervon ist leicht einzusehen. 2) Wenn BDA (Fig. 28. n. 2.) ein halber Cirkel ist, und DC ihn in zwey Theile theilet; wenn auf dieser Linie mit

einem willkührlichen Radius aus irgend einem beliebigen Centro K oder k ein Bogen, der durch A geht, beschrieben wird, so wird derselbe auch durch B gehen, und wenn K über C sich befindet, so wird der Bogen über D durch d gehen, war k unter C, so wird er unter D durch δ gehen. Es ist dies deutlich, da BK = AK und Bk = Ak, und die Cirkel sich nicht dekken können. Hieraus folgt, daß, wenn ein Punkt an einem beweglichen Diopterlineale beym Anfange der Eintheilung und bey 180° eintrift, alsdann das Centrum der Bewegung sich auf der Linie DC befinde, und zwar über C, wenn der Punkt beym Herumdrehen der Dioptern innerhalb des Bogens ADB fällt; unter C aber, wenn er alsdenn über den Bogen der Abtheilung hinausgeht, wenn die Dioptern von A bis B gedrehet werden. Die größte Abweichung ist in diesem Falle bey dem Punkt 90°. 3) Wenn aus dem Centro K (Fig. 28. n. 3.) ausser der geraden Linie DC, mit dem Radius KA der Bogen AdF beschrieben wird, so fällt er zuerst innerhalb des halben Cirkels ADB, hiernächst schneidet er CB zwischen C und B. Es ist dies offenbahr, da KA < BK, deswegen kann KA auch nicht den Bogen ADB ausserhalb A schneiden (die andere halbe Peripherie würde es schneiden, wenn sie über AB gezogen würde). Denn sonst würde es ihn irgendwo von neuen schneiden müssen, um nach F zu kommen, und es würden denn drey Durchschnittspunkte da seyn. Hieraus folgt, daß wenn

das

das Centrum der Bewegung in K ist, der in A auf dem Diopterlineale angemerkte Punkt, welcher A dekkte, so bald als das Lineal bewegt wird, innerhalb der Abtheilung in der halben Peripherie fällt, und nicht auf der andern Seite 180° erreichen kann. Nimt man das Centrum k, das jenem entgegensteht, an, so wird der Bogen AδG vom Anfange an ausserhalb der Peripherie der Abtheilung fallen, darauf wird er irgendwo in H dieselbe schneiden, und endlich zwischen C und B auf G fallen. Daher wird man die größte Abweichung bemerken, wenn man den Punkt H bemerkt, und das Diopterlineal an die Hälfte des Bogens AnH bringt. 4) Wenn das Centrum der Bewegung K (Fig. 28. n. 4.) über DC, in Rükficht auf A, gewesen ist, so wird, wenn man das Lineal mit den Diptern herumführt, der auf demselben bezeichnete Punkt, der A dekkte, im Anfange innerhalb des halben Cirkels der Abtheilung fallen, hierauf in H wieder darauf kommen, und auf den Radius BC ausserhalb B in F treffen, da BK < AK. Die größte Abweichung wird wiederum in der Mitte des Bogens AH, nemlich NM seyn. Ist aber k das Centrum der Bewegung, so wird der angemerkte Punkt des Diopterlineals, der A dekkte, sich immer aus dem Bogen der Abtheilung entfernen, und aus eben dem Grunde auf den Radius BC, ausserhalb B stossen. 5) Wenn das Centrum der Bewegung K auf der geraden Linie BA (Fig. 28. n. 5.) zwischen B und C ist, so

wird der auf dem Dipterlineale bemerkte Punkt stets auſserhalb der Peripherie der Abtheilung fallen, und die gröſste Abweichung wird FB seyn. Wäre es zwischen A und C, so würde das Gegentheil geschehen, wie man von selbst siehet. In diesem Falle berühren sich die Cirkel in A.

Durch diese Betrachtungen erhalten wir eine Anweisung, den Unterschied CK und Ck (Fig. 28. n. 3.) vom Centro der Bewegung und der Abtheilung zu finden. Man bemerkt einen Punkt auf dem bewegbaren Dioptrlineale, der den Punkt A dekkt, wo die Abtheilung der Grade anfängt. Man führt es darauf durch die ganze halbe Peripherie, und giebt zuförderst Acht, ob dieser Punkt bey der Bewegung nach B, oder nach dem 180° hin, nicht wiederum irgendwo auf die Peripherie stoſst. Findet man dies, so bringe man das Lineal nach dem Ort zurük, der die Hälfte von demjenigen Bogen ist, den es bis dahin, wo es wieder in die Peripherie traf, durchgegangen war. Stoſst der angemerkte Punkt ferner nirgends mehr auf die Peripherie, nachdem man es zu wiederholten Mahlen umhergeführt und probirt hat, so suche man den Ort, wo die gröſste Abweichung ist, wenigstens die Gegend desselben. Man lasse, zum andern, das Diopterlineal auf der Stelle stehen, wo der Punkt am mehresten abweicht, und bezeichne auſserdem den Punkt F oder G, wo der Punkt auf dem Lineale

den

den Radius BC erreicht. Man nehme, zum Beyspiel, hier die Entfernungen MF und MA mit dem Cirkel, wie auch AF, und beschreibe einen Cirkel durch die Punkte F, M, A. Hat man drey gegebene Seiten in dem Triangel FMA, so suche man den Winkel MFA, und denke sich QK aus dem Mittelpunkte Q der Sehne MA perpendikulair, welche Linie durch das Centrum K gehen wird. Denket man sich ferner den Radius MK gezogen, so ist der Winkel am Centro MKQ dem gefundenen Winkel an der Peripherie MFA gleich. Sagt man daher, wie sich sin. MFA : R = MQ : MK, so erhält man hier den Radius in Theilen der Scala. Man merke hier aber, daß kein Fehler entstehen kann, wenn man gleich die Sehnen MF und MA auf dem Punkte der größten Abweichung nicht erhält, sondern man merke blos einen Punkt M, wo man will an, denn hernach wird dieser Punkt durch Rechnung bestimmt; doch ziehen wir jenes vor, weil hier der Unterschied der Sehnen von den Sehnen der Abtheilung stets am deutlichsten gemerkt wird. Hat man den Radius, so ists deutlich, daß AF die Sehne des Bogens AMF sey, und wenn man aus dem Centro K auf dieselbe ein Perpendikel KP fallen läßt, so ist P der Mittelpunkt davon. Weil man nun BF weiß, so erhält man FP und FC, und daher auch CP. Hiernächst ist nun FK = MK = dem gefundenen Radius, und $KP = \sqrt{FK^2 - FP^2}$; es

wird

wird also CP und PK gegeben, daher ist $CK = \sqrt{CP^2 + KP^2}$; und wenn man weiter annimt, daß CP : CK = sin. CKP : R, so findet man den Winkel CKP = NCD, man erhält daher in der Theilung des Bogens den Punkt, durch welchen die gerade Linie, die durch die Centra C und K gezogen wird, gehet. Wir werden in der Folge die Linie CK den Centrifehler nennen. Zur rechten Bestimmung der Lage CK werden die vorigen Bemerkungen uns nützen.

§. 107.

Weiß man, wie viel der Centrifehler in Theilen der Scala beträgt, so darf man nur erforschen, was dadurch für Fehler in Rüksicht auf die durch dieses Instrument aufgenommenen Winkel entstehen können, und wie man sie deswegen zu verbessern habe. Man nehme an (Fig. 29.), das Centrum der Bewegung sey in d gefunden, und AO der Bogen, den die gerade Linie, die durch das Centrum der Bewegung d und der Abtheilung C gezogen ist, abschneidet. Es erhellet deutlich, wenn das bewegbare Lineal auf dem Instrumente die Lage OCd hat, so findet man den wahren Bogen AO ohne einen Fehler. Nimt man aber einen kleinern Winkel als AO, z. B. AG auf, so macht der Centrifehler diesen Winkel schon unrichtig. Man ziehe Gd, welches den Radius AC in D schneiden soll. Man siehet gleich, daß GDA der scheinbare Winkel seyn werde und nicht GCA, welchen der Bogen AG mißt. Man lasse aus C auf Gd ein Perpendikel CH fal-

len,

len, und aus O das Perpendikel OL. Da der Winkel CGd (welcher die Differenz zwischen dem wahren scheinbaren Winkel GDA und GCA, den das Instrument anzeigt, ist) sehr klein ist, so können auch die Sinus der Winkel GdO und GCO für gleich und die rechtwinklichten Triangel dCH und COL für ähnlich angesehen werden. Deswegen wird sich verhalten Cd : CH = R : sin. OCG, oder sin. (ACO — ACG); das heißt, der sin. tot. verhält sich zum sin. der Differenz des beständigen und richtigen Winkels ACO, und des erhaltenen Winkels ACG, wie sich verhält der Centrifehler dC in Theilen der Scala, zur Linie CH in eben solchen Theilen. Da hiernächst die Winkel sehr klein sind, so sind die Bogen von den Sinussen nicht merklich unterschieden. Deswegen wird man die Linie CH sicher für den Bogen annehmen können, welcher, mit dem Radius GC beschrieben, den Winkel CGD mißt. Da es nun bekannt ist (Geom. §. 343.), daß der Radius, wenn er auf einen Bogen reducirt wird, 57°17′44″,8, oder 206264″,8 sey (dessen Logarithme 5,3144251 ist), so bleibt diese Proportion übrig, welche durch Hülfe der Logarithmen bald gemacht wird: Wie sich die Zahl der Theile der Scala, die mit dem Radius des Instruments übereinkommen, zu 206264″,8 verhält, eben so verhält sich die gefundene Zahl eben solcher Theile der Linie CH zur Zahl der Minuten

und

und Sekunden des Winkels der Verbesserung CGd verhalten.

§. 108.

Wer die 29te Figur betrachtet, wird sehen, daß in dem ganzen Bogen AO die Winkel kleiner erhalten werden als sie wirklich sind, deswegen muß die gefundene Verbesserungsgrösse bis O addirt werden. In O findet aber keine Verbesserung statt. Wenn die erhaltenen Winkel über den Bogen AO gehen, als wenn man z. B. den Winkel AM erhält, so ists deutlich, daß man grössere Bogen erhält, als sie es wirklich sind. Man ziehe Md, welche den Diameter AB in r über C, von A gerechnet, durchschneidet. Der wahre Winkel im Gesichtspunkte wird ArM, der falsche hingegen, den das Instrument angiebt, wird ACM seyn, welcher um den Winkel CMd grösser ist, als der wahre. Wenn man daher wieder aus C und O die Perpendikel CI, ON herabfallen läßt, so müssen die Triangel dCI und CNO für ähnliche gehalten werden, und man sagt: wie R : sin. (ACM — ACO) = dC : CI, oder der Radius verhält sich zum sin. der Differenz des erhaltenen Winkels, und des beständigen und wahren ACO, wie der Centrifehler zu CI, und alsdenn findet man hernach durch Hülfe der Gleichung im vorigen §. den Winkel dMC, der hernach bis B beständig abgezogen werden muß.

§. 109.

§. 109.

Aus diesen Betrachtungen kann man überflüßig sehen, daß, wenn man mit einem solchen Astrolabio viel zu verrichten haben sollte, man eine Tafel verfertigen könnte, die zu einem jeden Grade eingerichtet wäre, oder auch von 5 zu 5, oder 10 zu 10, je nachdem der Centrifehler groß oder klein wäre. Das muß man nicht unbemerkt lassen, daß derselbe die Winkel von O bis B immer mehr falsch angebe, bis zu einem gewissen Punkt, über welchen hinaus der Fehler wieder kleiner wird. Der Punkt wird leicht gefunden, wo die Verbesserung am größten ist, nemlich in der Distanz des Quadranten von O, oder in K. Denn wenn man KC zieht, so wird sie auf OCd perpendikulair stehen, und so wie der Sin. OCK der Radius selbst ist, so wird der ganze Centrifehler Cd der Bogen, welcher den Winkel der Verbesserung CKd mißt.

§. 110.

Was wir jetzt gesagt haben, wird ein jeder Anfänger auf eine jede andere Lage des Centrums der Bewegung d leicht anwenden können. Gesetzt, es befände sich dasselbe (Fig. 30.) innerhalb des Diameters AB in d. Nimt man in diesem Falle den Winkel AG, so ist GDA der wahre Winkel des Gesichtspunkts, kleiner als ACG, den das Instrument anzeigt, und zwar um den Winkel DGC kleiner. Es werden aber, da die Differenz klein ist, die

Trian=

Triangel OdL (welcher Triangel dCH ähnlich ist), und OCL für gleiche Triangel (in Rükſicht auf den Sinus OL) gehalten werden können; deswegen gilt die Proportion CO : OL = dC : CH, das iſt, Sinus totus verhält ſich zu dem Sinus der Differenz des erhaltenen Winkels ACG und des beſtändigen Winkels ACO, wie der Centrifehler zu CH, welche Linie auf Theile des Radius zu reduciren iſt, damit man die Verbeſſerung DGC erhalte, welche, wie man ſiehet, durch den ganzen Bogen AO abgezogen werden muß. Ueber O wird dieſe Verbeſſerung zu addirt, als wenn man den Bogen AM hätte. Denn zieht man Mdr, ſo ſchneidet ſie den Diameter BA zwiſchen A und C, und der wahre Winkel im Geſichtspunkte ArM iſt gröſſer als der Winkel auf dem Inſtrumente ACM und zwar um ſo viel, als der Winkel CMd oder CMr beträgt. Das Perpendikel CI findet man durch eben dieſes Verhältniß, wie R : ſin. (ACM — ACO) ſo Cd : CI.

§. III.

Bey Inſtrumenten von dieſer Art hat man endlich darauf ſorgfältig Acht zu geben, daß die Dioptern, ſie mögen nun aus feinen Faden, oder aus Linien, die in meſſingene Bleche eingeſchnitten ſind, beſtehen, vollkommen perpendikulair auf der Fläche des Inſtruments ſtehn, und daß die, welche feſt ſtehen, genau auf die Punkte 0° und

180°

180° treffen; die bewegbaren aber auf die schräg abgeschnittene Seite des bewegbaren Lineals, welche die Zahl der Grade abschneidet. Bringt man das bewegbare Diopterlineal nach AB (denn es ist gewönlich etwas kürzer, damit dies angehen kann), so müssen die vier Dioptern, wenn man hindurch sieht, wie eine einzige erscheinen, und die Faden sich untereinander genau dekken; geschieht dies nicht, so ist bey der Stellung der Dioptern ein Fehler begangen, den man, so viel man kann, verbessern muß. Wer sich von einem geübten Künstler Instrumente zum Winkelmessen verfertigen läßt, der muß es ihm sorgfältig einschärfen, daß er nicht den Theil des meßingenen Blechs, wo er das Centrum der Eintheilung angenommen hat, ausschneide, sondern es ganz lasse, damit man die Untersuchung des Centri und der Eintheilung, so oft als man will, auf eine leichte Art anstellen könne. Denn viele pflegen mitten auf dem Instrumente ein Behältniß für eine Magnetnadel, oder sonst andere unnütze Zierrathen anzubringen, als wenn man dergleichen Behältnisse für Magnetnadeln nicht wo anders befestigen könnte, wenn man sie gebrauchte, oder solche an einem unschiklichen Orte angebrachte Zierrathen dem Verfertiger des Instruments ein so grosses Zutrauen verschaffen könnten, daß niemand gegen ihn Mißtrauen haben, und seine Kunst auf die Probe zu setzen wagen dürfte.

§. 112.

Der berümte Tobias Mayer, der sich um die Mathematik so verdient gemacht hat, schlägt (in den Abhandl. der Königl. Akad. der Wissenschaften zu Göttingen, 2ter Theil für das Jahr 1752) einen neuen Winkelmesser vor, von dem er vorgiebt, daß er richtiger sey als die gewöhnlichen Astrolabia. Wer eine genaue Beschreibung des Instruments verlangt, der sehe selbst die angeführten Abhandlungen nach. Ich will hier nur kürzlich zeigen, was ihm besonders eigen ist. Das Instrument besteht aus zwey Linealen EF und HG, von denen das unterste HG an einem hohlen Cylinder NO gelötet ist, welcher auf den Obertheil QR des durchaus festen Fusses des Instruments paßt, und vermittelst einer Schraube P an ihn fest kann angeschroben werden. Das obere Lineal EF, welches über einer kegelförmigen Oefnung auf dem untersten liegt, kann um eine gleichfalls kegelförmige Axe bewegt werden, so, daß das obere frey herumgedreht werden kann, indem das untere unbeweglich liegen bleibt. An dem obern Lineale befestigt man mit zwey Ringen, welche mit den Schrauben L und M angeschroben werden können, einen Tubus, der etwas kürzer als das Lineal ist, dessen Objectivglas bey I und Ocularglas bey K in einer andern kleinen beweglichen Röhre gesetzt ist, um von einem jedem Auge gebraucht werden zu können. In den gemeinschaftlichen Fokus der Gläser sezze man ein ebenes Glas

(Fig.

(Fig. 32.), in dessen Mittelpunkte sich sehr feine Linien AB und CD, die mit einem Feuersteine oder Diamanten gezogen sind, in einem rechten Winkel durchschneiden. Am Ende der Lineale bezeichne man auf einer durchs Centrum der Bewegung gehenden Linie und in gleicher Entfernung von demselben die Punkte A, C, B, D, deren Distanzen voneinander man mit einem Cirkel mißt, als z. B. CD oder AB, auf die Scala der Sehnen überträgt, und so den Winkel erhält.

§. 113.

Zu dem Ende muß man zu dem Radius, der $\frac{1}{2}$AC oder $\frac{1}{2}$BD gleich ist, eine Sehnen-Scala verfertigen, wovon in der Geometrie im 251 §. schon geredet ist. Um dies zu können, muß man eine genaue geometrische Scala bey der Hand haben, auf deren Theilen man $\frac{1}{2}$AC erhalten kann. Man nehme dann die Sinus der halben Winkel, verdopple sie, und sezze folgende Proportionen an: Wie sich der Radius in den Tafeln zu dem verdoppelten erhaltenen Sinus verhält, so verhält sich der Radius des Instruments zu der Sehne jenes doppelten Winkels, dessen Sinus man erhalten hat. Wenn man z. B. die Sehne des Winkels von 10° sucht, so suche man in den Tafeln den Logarithmen von 2 × sin. 5°; man suche gleichfals in den natürlichen Zahlen den Logarithmen der Theile des Radius des Instruments, diese addire man

zusammen, und ziehe von der Summe den Logarithmen des Radius in den Tafeln, oder 10,0000000 ab, was übrig bleibt, wird der Logarithme der natürlichen Zahl seyn, welcher die Zahl der Theile der Sehne von 10°, die mit der Scala übereinkommen, anzeigen wird. Es sey z. B. der Radius des Instruments 5″ oder 500 Theile der Scala,

Log. 2 = 0,3010300
Log. sin. 5° = 8,9402960
Log. 500 = 2,6989700

die Summe ist = 11,9402960. Wirft man 10 davon hinweg, so bleibt der Logarithme 1,9402960 übrig, welchem die Zahl 87,15 zunächst zukommt. Auf diese Art kann man für den Bogen von 1° bis 90° alle Sehnen finden. Um durch ein Beyspiel und groben Abriß die Sache deutlich zu machen, mag einmahl ABCD (Fig. 35.) eine solche Scala für die Sehnen seyn, welche aber nicht weiter als 60° gehet. DC soll der Radius seyn oder die Sehne von 60°; DA und BC sind in zehen gleiche Theile getheilt. Auf DC sind von D aus die Sehnen D 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60° übergetragen worden, auf AB aber die Sehnen A5, A15, A25, A35, A45, A55, oder die Sehnen von 5°, 15°, 25°, 35°, 45°, 55°. Die Abtheilungen 5, 10; 10, 15; 15, 20 u. s. w. werden durch schräglaufende Linien verbunden. Bey der Seite

DA

DA werden die Zahlen 1, 2, 3, 4 so gesetzt, daß immer eine Abtheilung dazwischen unbezeichnet bleibt. Der Theil na ist die Sehne von 30′ oder $\frac{1}{2}$°; 1b ist die Sehne von 1°; 2c die Sehne von 2°. A5 ist die Sehne von 5°; 4e die Sehne von 6°; 3f die Sehne von 7°; 2g die Sehne von 8°; 1h die Sehne von 9°; D10 die Sehne von 10°. So erhält man ferner auf der schräglaufenden Linie 10,15 aus der Linie DA die Sehnen 11°, 12°, 13° bis 15°. Das übrige kann man schon hieraus abnehmen. Wollte man wissen, von was für einem Bogen die Linie kl die Sehne sey, so sezze man den einen Fuß des Cirkels auf die Linie AD, und sehe zu, wo irgend in einer schräglaufenden Linie, hier in der Linie 35 bis 40, der andere in eine solche, die mit DC parallel läuft, hier kl, falle. Man zähle dann die Grade von 35 bis 1, die man auf den Parallellinien, wenn man eine übergeht, gantz, und wenn man sie nacheinander nimmt, stets einen halben, von Linie zu Linie findet. Hier wird man $2\frac{1}{2}$ finden, daher schließt man, daß kl die Sehne von 37°30′ sey.

Doch ich muß hier bemerken, daß diese Scala nicht akkurat sey, und sich darinn auch Fehler auf Minuten erstrekken können, zumahl bey den Sehnen der Winkel, die nicht viel von 90° unterschieden sind, woselbst die Differenzen der Sehnen sehr klein werden. Man erhält nemlich nur die wahren Sehnen der Winkel 5°, 10°, 15°, 20° u. s. w.; die Sehnen aller dazwischen lie-

genden Bogen erhält man durch schräglaufende Linien. Wenn aber die wahren Sehnen der dazwischen befindlichen Bogen auf zwischen AB und DC laufende Parallellinien getragen werden sollten, so würden ihre Enden keinesweges durch geradlinigte schräglaufende Linien verbunden werden können, sondern sich in einer krummen Linie befinden. Wer sich also eine solche Scala zum akkuraten Gebrauch verfertiget, der ziehe keine gerade Linien, die schräg, von 5 zu 5 Graden laufen, sondern er verbinde nur die äuersten Punkte der dazwischen liegenden Sehnen durch besondere einzelne gerade Linien. Doch wir wollen nun zum Gebrauch des Mayerschen Winkelmessers zurükgehen, nachdem wir die Sehnen = Scala erklärt haben.

§. 114.

Man soll den Winkel POQ (Fig. 33.) aufnehmen. Man sezze das Instrument so, daß sein Centrum in O zu stehen kommt. Das untere Lineal GH falle etwas ausserhalb der Schenkel des zu nehmenden Winkels, und werde in dieser Lage mit der Schraube P (Fig. 31.) befestigt. Man bringe hierauf das obere Lineal mit dem Tubus FE in die Lage FEQ, und sezze es mit Q in einer geraden Linie, so daß das Objekt auf der Vertikallinie AB (Fig. 32.), die in dem ebenen Glase, das im Fokus stehet, befindlich ist, erscheinet. Man nehme nun mit dem Cirkel die Distanz der Punkte D, C, welche sich nahe an den En-

den

den F und G auf den Linealen befinden, und suche vermittelst der Scala der Sehnen den Winkel FOG. Das unterste Lineal bleibt unbeweglich stehen; das obere hingegen bringt man in die Lage fe, damit das Objekt P auf der im Glase eingeschnittenen Vertikallinie erscheine. Man nimt wieder die Distanz der Punkte, oder die Sehne des Winkels fOG. Die Differenz der Winkel fOG und FOG wird der gesuchte Winkel FOf = POQ seyn, wie sich von selbst ergiebt. Es hätte auch, zumahl bey grossen Winkeln, das feste Lineal GH innerhalb der Schenkel des Winkels gestellt werden können, und dann wäre nicht die Differenz, sondern die Summe der beyden Winkel der gesuchte Winkel gewesen. Ausserhalb der Schenkel läßt man alsdann das feste Lineal fallen, wenn die zu messenden Winkel klein sind, um zu kleine zu vermeiden; aber man stellt es innerhalb der Schenkel, wenn die zu messenden Winkel stumpfe sind, um an ihrer Stelle spitzige zu erhalten. Aus diesem Gebrauche des Winkelmessers kann man deutlich genug wahrnehmen, daß, wenn man sich auf denselben sicher will verlassen können, nothwendig erfodert werde, daß die Bewegung des obern Lineals frey geschehen könne, ohne daß das untere sich aus seiner Lage verrükt, welches allein von der Sorgfalt des Künstlers, und der Festigkeit des Fusses oder der Stüzze abhängt, weil, wenn man keine sichere Linie hat, kein Mittel vorhanden ist, wodurch man sich überzeugen kann, daß

das untere Lineal nicht aus seiner Lage verrükt sey, indem das obere gegen das Objekt gerichtet wurde.

Ausserdem gefällt mir bey diesem Instrumente das nicht, daß die auf den Linealen eingestochenen Punkte leicht verdorben werden, wenn das Instrument ein wenig oft gebraucht wird.

§. 115.

Ich füge jetzt noch das hinzu, was der berümte Mann nicht allein von dem Gebrauche dieses Winkelmessers, sondern auch fast aller derer Instrumente gesagt hat, womit man Winkel zu messen pflegt. Mit kleinern Instrumenten kann ein doppelter Fehler begangen werden. Der eine hat in der Collineation, die nicht genau genug angestellt wird, seinen Grund; der andere in der Eintheilung des Instruments, oder der Scala (wenn wir annehmen, daß sich sonst kein bey der Verfertigung des Instruments begangener Fehler noch dabey befindet, welches der Untersuchung des Instruments zu überlassen ist, und ich daher als bekannt voraussetze): dem erstern ist durch den an der Stelle der Dioptern angebrachten Tubus genug abgeholfen, und obgleich einer und der andere, der aus der Unvollkommenheit des Instruments (dessen Theile, in Rüksicht auf eine und die andere Minute, nicht genau abgetheilt werden können) entsteht, übrig bleibt, so kann man sie doch durch die im folgenden gelehrte Multiplica-

plication des zu messenden Winkels auf eine ausserordentliche Art klein machen.

Man nehme nach dem 114. §. den Winkel POQ (Fig. 34.), schraube hernach P auf (Fig. 31.), und bringe das obere Lineal mit seinem Tubus in die Lage OeQ, daß das Objekt Q auf der vertikalen Linie des Glases AB (Fig. 32.), das feste Lineal aber auf hog komme. In dieser Lage schraube man mit der Schraube das Lineal hg fest, und führe den Tubus aus der Lage fe zum andern Objekt P in eine solche Lage, daß P sich auf der vertikalen Linie des Glases befinde, und der Winkel god gemessen werde, welcher nun 2POQ + eOB in sich enthalten wird. Man lasse wieder die Schraube P los, damit der Tubus sich in der Lage OQ befinde; das feste Lineal bringe man aus hOg nach kOi, hier schraube man es fest, und führe das obere Lineal mit dem Tubus nach cd; nehme die Sehne id (oder wenn der Winkel dOi stumpf ist, die Sehne seines Supplements ic), so wird man 3POQ + eOB erhalten, man wiederhole dies, so oft es nützlich zu seyn scheinen sollte. Man siehet leicht, daß, wenn man von dem letztern erhaltenen Winkel (welcher der gesuchte Winkel multiplicirt, und hier dreymahl, ist und durch den stehen gebliebenen eOB noch vergrössert ist) den stehen gebliebenen Winkel abzieht, hernach den Rest durch die Zahl dividirt, die der gleich ist, welche anzeigt, wie oft der Tubus von OQ nach OdP geführet ist, eben hierdurch der

bey dem Aufnehmen des Winkels begangene Fehler getheilt, und dadurch um so viel kleiner gemacht werde, je mehr man ihn multiplicirt hat.

§. 116.

Zweyerley wollen wir hierbey noch untersuchen, 1) ob durch eine solche Multiplikation eines Winkels bey dem einzelnen weitern Aufnehmen nicht leicht neue Fehler begangen werden können, weil man, wenn man keine gewisse Linie hat, nicht gewiß ist, ob das feste Lineal bey der Bewegung des andern unverrükt stehen geblieben ist? Geschähe dies, so würden alle Fehler von einer Art seyn, alle Winkel würden zu klein und falsch seyn, und der erstere Fehler würde nicht kleiner werden. 2) Ob nicht die Verringerung des Fehlers leichter zu erhalten sey, wenn eben dieser Winkel POQ stets von neuen wieder gemessen würde, so daß man entweder die Dioptern gerade auf die Objekte richtete, oder stets einen andern beständig stehenden Winkel eOB nähme, und von allen die arithmetische Hälfte suchte, oder welches gleich viel sagen will, alle gesuchte Winkel zusammen addirte, und die Summe durch die Zahl dividirte, welche anzeigt, wie oft der Winkel genommen sey? Auf diese Art, glaube ich, würde der Fehler auf gleiche Art vermindert werden. Es könnte hiergegen freylich jemand einwenden, daß bey der Multiplication des Winkels nach der Art, die Mayer vorgeschlagen

gen hat, und bey der Vorausſetzung, daß das Inſtrument feſt genug ſey, um die Abweichung des feſten Lineals unmöglich zu machen, ſtets verſchiedene Sehnen genommen würden, die von der Sehne des zuerſt erhaltenen Winkels verſchieden wären: hätten ſie daher gleich verſchiedene Fehler, ſo könne deswegen doch der Fehler kleiner gemacht werden. Ob ich gleich nicht ſehe, wie mein Bedenken hierdurch auf eine befriedigende Art aufgehoben ſey, ſo will ich mich doch nicht länger hierbey verweilen.

§. 117.

Es können auch an den Aſtrolabiis, von denen ich zuerſt geredet habe, anſtatt der Dioptern kleine Tubi angebracht werden. Derjenige Tubus, welcher anſtatt der an dem feſten Lineale befindlichen Dioptern A, B angebracht wird, wird an der entgegenſtehenden Seite, oder unter dem Lineale AB (Fig. 28. n. 1.), der andere über dem Lineale EH befeſtigt, doch ſo, daß die Axe des Tubus mit der ſchräg abgeſchnittenen Seite des Lineals EO, welche die Grade des erhaltenen Winkels abſchneidet, parallel laufen muß, ſo wie die Axe des andern feſten Lineals ſich mit AB dekken muß. Man wird dieſes erforſchen können, wenn man das Centrum des Inſtruments C auf einer geraden Linie ſezt, auf welcher ſich zwey Objekte P und Q (Fig. 36.), die aber ziemlich weit voneinander entfernt ſeyn müſſen, befinden. Man richte den feſten Tubus ed

gegen

gegen Q, und nehme vermittelst der herum befindlichen Gegenstände, woran es nicht leicht fehlen kann, verschiedene Winkel von e bis d, wo man durch den bewegbaren Tubus das Objekt P siehet. Kommt die Summe aller gefundenen Winkel auf 180°, so stehen die Axen der Tubus recht. Wiche aber z. B. die Axe des bewegbaren Tubus DCE von der rechten Lage ACB ab, so würden alle Winkel kleiner ausfallen, und das Objekt P würde schon in dem Tubus d e erscheinen, wenn die Schärfe des bewegbaren Lineals die Lage aCb haben würde. Das Gegentheil würde geschehen, wenn AB die Axe des bewegbaren Tubus wäre, und DE die Schärfe des Lineals. Man kann diese Untersuchung auf eine andere Art anstellen, wenn man nemlich die Entfernung zweyer Gegenstände wirklich mißt, und nun ausrechnet, unter welchem Winkel sie aus einem gegebenen Orte erscheinen müssen, darauf das Instrument nimt, und damit den Winkel selbst mißt, und nun sieht, ob er mit der Rechnung übereintrift. Stellt man diese Untersuchung zu mehrern mahlen an, und bestimmt mehrere unterschiedene Winkel, so kann man die Abweichung der Axen der Tubus bald abändern. Man siehet nun, daß das, was wir von der Untersuchung der Lage der Axen gesagt haben, auch auf die Lage der Dioptern oder Visire angewendet werden könne.

§. 118.

§. 118.

Wir wollen aber die Grösse des Fehlers etwas genauer untersuchen, der aus der Collineation entstehet. Der vorhin angeführte D. Mayer hatte auf ein Papier schwarze Parallellinien, deren jede $\frac{2}{10}$ von einer Linie breit war, gezogen, dazwischen aber weisse Zwischenräume von eben der Breite gelassen. Dieses hielt er gegen das Auge, und zog es so weit davon zurük, bis die Linien nicht mehr voneinander unterschieden werden konnten. Er bestimmte nun durch eine leichte Rechnung nach der Entfernung des Auges, daß in derselben $\frac{2}{10}$ von einer Linie einen Winkel von 2′ 54″ einnähmen. Hieraus schließt er, was unter einem Winkel, der kleiner als 2′ ist, erscheinet, könne nicht mehr deutlich gesehen werden. Diejenigen, die sich der Dioptern bedienten, wären daher bey der Messung der Winkel nie vor einem Fehler von 2′ sicher. Da durch Tubus die Objekte vergrössert werden (und die Vergrösserung, die die Tubus hervorbringen, im halben Verhältniß der Länge besteht), so verringern sie in eben dem Verhältniß, als sie vergrössern, eben deswegen diesen Fehler. Ich glaube aber, daß unter den Dioptern ein grosser Unterschied statt findet. Oft ist die Linie AB (Fig 37.) in der Diopter CD, durch welche man siehet, sehr fein durchgeschnitten, die andere ihr gegenüber stehende EF, durch welche man hindurch siehet, hat einen Faden, das heißt, sie besteht aus einem durch-

brochenen viereckichten metallenen Bleche, welches in der Mitte von einem dünnen Faden GH durchschnitten wird. In diesem Falle kömmt es darauf an, daß man unterscheiden kann, ob dieser Faden einen Gegenstand, z. B. die Spitze eines Thurms oder Baums u. s. f. akkurat genug schneidet, welches eben so schwer nicht ist, da das Auge genau genug unterscheiden kann, ob auf einer Seite des Fadens sich mehr oder weniger von dem Gegenstande zeige. Dieses habe ich mehrmahls erfahren, wenn ich meine Schüler in dergleichen Messungen übte. Ist das Objekt zu klein, als daß es überall neben dem Faden sich zeigen sollte, so merkt man aus der scheinbaren Ungleichheit der Dikke des Fadens es sehr leicht, wenn die Collineation nicht akkurat ist. Durch die ganze Länge des Fadens darf das Objekt nicht hervorragen, denn dies kann nur selten vorkommen. Dafür muß man nur sorgen, daß der Durchschnitt AB in der Diopter CD, durch welche man siehet, weder zu fein noch zu grob sey. In dem ersten Fall macht das Brechen des Lichts einen zu grossen Schatten, als daß man mit dem Faden genug sollte unterscheiden können; im andern kann eine Parallaxe seyn. Ist er aber von mittelmäßiger Grösse, so kann ein daran gewöhntes Auge den Schatten der Strahlenbrechung von dem Faden der entgegengesetzten andern Diopter leicht genug unterscheiden.

§. 119.

Zu dieser Meinung werde ich durch den Gedanken gebracht, daß es weit schwerer sey, die Theile einer ganzen Minute (dergleichen bey dem Mayerschen Versuche die schwarzen Linien, die sich um den weissen befinden, ausdrükken) zu unterscheiden, als eine feine in einer gleichen Fläche (dergleichen die breite Oefnung der Diopter EF mit dem Faden giebt) befindliche Linie. Diese kann bey einer viel weitern Entfernung, und auch unter einem Winkel von sehr wenigen Sekunden gesehen werden. Man sehe Käſtners vollständige Optik und Jurins Abhandlung vom deutlich und undeutlich Sehen, den 6. §. Ich will gewiß nicht leugnen, daß die Fehler bey der Collineation leichter durch Tubus vermieden werden können; aber ich kann mich keinesweges überzeugen, daß man auch in dem Falle, wenn der leere Raum oder Diopter EF hell genug erleuchtet ist, einen so grossen Fehler zu begehen, sollte Gefahr laufen können. Ein andres wär's, wenn man das Objekt nicht deutlich sehen könnte, wenn die Lichtstrahlen gleichfals gegen einen dunkeln Ort, als eine Wiese oder entlegenen Berg fielen, alsdann räume ich es gern ein, daß in der Collineation durch die Dioptern sogar noch grössere Fehler begangen werden können. Dann muß man aber auch die Messung mehrmahls wiederholen, wenn etwas gewisses herausgebracht werden

soll,

soll, welches auch in diesem Falle durch Tubus nicht so genau wird geschehen können.

§. 120.

Ein Faden, welcher 0,0058″ dikk ist, erscheint in einer Entfernung von 10″ unter einem Winkel von 2′ (wie dies erhellet, wenn man sezt: 206264″, 8 : 120″ = 10″ : x, welche Proportion durch die Logarithmen bald berechnet werden kann). Es kann kommen (ja es trägt sich in der That häufig zu), daß ein Objekt in einer grossen Entfernung, z. B. von 1000′ oder auch wenigern, unter einem kleinen Winkel gesehen wird, und daß daher nicht allein dasselbe von dem Faden bedekt wird, sondern daß es auch nicht zum Vorschein kommen kann, wenn man auch den Faden ein wenig rechts oder links bewegt. In diesem Falle kann man nicht sehen, ob die Diopter recht stehe, oder ob der Winkel um ein weniges grösser oder kleiner gemacht werden müsse. Visirt man nicht gegen einen Berg, sondern gegen den freyen Himmel, so wird der Gegenstand, dessen Diameter 3,49″ über dem Horizont hervorragt, noch leicht unter einem Winkel von 1′ aus einer Entfernung von 1000′ oder 12000″ gesehen. Führt man daher die Diopter auch durch eine ganze Minute fort, so wird das Objekt noch vom Faden gedekt bleiben, und daher ein Fehler von 1′ kaum bey der Collineation vermieden werden. Man kann hieraus aber

abneh=

abnehmen, daß man so feine Faden als möglich zu den Dioptern nehmen müsse.

§. 121.

Wenn die Faden in den Dioptern fein genug sind, so werden bey kleinen Instrumenten ziemlich grosse Fehler begangen, die die Eintheilung der Grade in eben nicht kleine Theile veranlaßt. Denn gebraucht man auch ein Vergrösserungsglas, und es gehet die scharfe Seite des Lineals nicht genau gerade durch ein Abtheilungszeichen, so kann man kaum unterscheiden, den wie vielsten Theil es von der folgenden Abtheilung abschneidet. Befinden sich in der Abtheilung Theile von 10 zu 10 Minuten, so kann man deutlich genug die Hälfte solcher Abtheilungen finden, kleinere Theile aber kaum genug von einander unterscheiden. Man muß alsdann diese Theile nach dem Augenmaasse schäzzen, welches leicht einen Fehler von zwey, ja drey Minuten veranlassen kann. Uebrigens ist so viel ausgemacht, daß ein in diesen Beobachtungen geübtes Auge oft genau genug das unterscheiden kann, was ein anderes nicht unterscheidet. Freylich liesse sich durch fleissige und denkende Künstler bey den Instrumenten, mit welchen man Winkel mißt, noch manches ausrichten, wenn sich nur jemand fände, der einen so nützlich angewandten Fleiß stets auf eine würdige Art belohnte; oder wenn die Zahl derer Käufer kleiner wäre, die mit der äu-

serlichen Zierlichkeit der Instrumente zufrieden, solcher Künstler Sorglosigkeit oft nähren, die alsdenn wegen der Sorgfalt, die sie auf ihre Instrumente verwenden könnten, nicht sehr bekümmert sind, noch weniger für ihre fernere Vollkommenheit sorgen, wenn sie sehen, daß sie sich schon dadurch so vielen Unterhalt auf eine leichte Art verschaffen können, als sie gebrauchen, um auf eine anständige Art leben zu können.

§. 122.

Noch etwas habe ich von der Mensul zu sagen, die man die Prätorianische nennet, und sehr häufig gebraucht; wiewohl die Verrichtungen, die man damit vornimt, nicht sowohl trigonometrische Arbeiten, als vielmehr geometrische Anwendungen zu nennen sind. Die Mensul selbst wird vermittelst eines Rahmens, den man wegnehmen kann, mit einem reinen Papier bedekt, und ruhet auf drey Füssen, welche um Axen bewegt werden können, damit man die Mensul in eine jede Lage bringen kann, je nachdem man die Füsse mehr oder weniger auseinander zieht. Das vornehmste Stück an derselben ist das Diopterlineal. Ich habe eines bey der Hand, dessen Länge AB (Fig. 38.) 2′4,6″ beträgt. Die Distanz der Dioptern CD macht 26,2″. Die Höhe der Dioptern, als CG macht 8,5″. Beyde Dioptern sind doppelt. CG hat oben die Spalte np, die 3,2″ lang und 0,02″ breit ist. Ihr steht auf der

andern

andern Seite in der Diopter DH die Oefnung mit dem Faden rs entgegen, die eben so lang, aber 0,5″ breit ist. Mitten durch sie ist eine sehr feine Sehne von einer Seite gezogen. Unten in CG ist für die Fadendiopter om eine gleiche Oefnung, und für sie befindet sich in DH die Spalte tu von gleicher Länge, aber in einer Breite von 0′02″. Man kann daher das Auge sowohl an B als A anlegen, weil man auf der einen Seite durch tu und mo, und auf der andern durch np und rs sehen kann. Die Faden in den Dioptern und die Spalten sind genau auf die Schärfe des Lineals EF gezogen, und die Dioptern selbst stehen auf der Fläche des Lineals AEFB rechtwinklicht. Ingleichen sind sie auch bey C und D um Axen bewegbar, so daß man beyde auf die Fläche des Lineals umlegen kann, da man ausser dem Gebrauch das Lineal in ein Futteral sticht. Mit der Diopter DH sind zwey kleinere LKIH und QPOB verbunden, wovon jene einen Faden und eine offene Seite hat, diese aber einen Visirpunkt oder Spalte zy, die sehr fein ist, welche beyde, ausser dem Gebrauch, wovon wir unten reden werden, auf die Fläche der grössern Diopter HD niedergelegt werden können, da sie auf gleiche Art um kleine Axen, die durch HL und BQ gehen, bewegbar sind.

§. 123.

Manche bringen bey dieser Art von Linealen (welche von verschiedener Grösse seyn können) auf beyden Seiten

in den Dioptern GC und DH blosse Faden an. Um aber wissen zu können, ob das Lineal gehörig gegen das Objekt gerichtet sey, so müssen sie, indem das Auge aus B durch A siehet, sich von der Diopter DH etwas entfernen (denn in einer zu grossen Nähe würde man nicht deutlich sehen können), und nun acht geben, ob jeder Faden in den Dioptern sich mit dem Objekt auf einer und ebenderselben geraden Linie befindet, oder ob der Faden der nähern Diopter den Faden der entferntern akkurat dekkt, welcher das Objekt zu durchschneiden scheint. Dies bewerkstelliget auch die auf dem vorher beschriebenen Lineale befindliche Fadendiopter LKIH, welche kürzer, und mit der grössern Diopter DH nahe am Ende LH verbunden ist, sich auch auf gleiche Art um eine kleine Axe, die durch HL gehet, bewegen läßt. Man richtet nehmlich auf der Diopter DH, welche auf der Fläche des Lineals DFEC angebracht ist, die andere LKIH, in welcher die Länge des Fadens $qx = 0{,}8''$ ist, der, wenn man durch mo siehet, gedekt werden und das Objekt durchschneiden muß, in einer vertikalen Lage auf. Auf der Oberfläche des Lineals EFDC schneidet man endlich verschiedene Maaßstäbe ein, wie z. B. auf der meinigen ein Wiener Fuß, dessen Zoll in 60 gleiche Theile getheilt ist, und ein Militairfuß sich befindet

§. 124.

Befinden sich die Dioptern in ihrer gehörigen Lage gegen das Objekt, so wird nach der Schärfe EF aus der Spitze des zu messenden Winkels, in welche man eine feine Nadel sticht, welche die Schärfe des Lineals akkurat berühren muß, eine Linie mit dem Bleystift gezogen. Man schiebt darauf eben diese Schärfe des Lineals um die Nadel fort, visiret gegen das andere Objekt, zieht eine neue Linie, und erhält so den Winkel. Man nimt insgemein an, daß ein geübtes Auge in der Collineation selten einen Fehler begehen könne, der grösser als 2′ wäre; sind aber die Faden etwas grob, so können dadurch die Fehler auch (§. 119.) grösser werden, indem noch ausserdem, wenn man nicht die größte Sorgfalt anwendet, durch zu dikk gezogene Linien, oder durch einen kleinen Stoß an das Lineal, die Abweichung noch weit grösser werden kann. Zu spitzige Winkel muß man beym Messen vermeiden. Denn da eine jede Linie eine gewisse Breite hat, so kann der Punkt, in welchem sich die zwey Linien, welche die Spitze des Winkels bilden, durchschneiden, nicht recht gefunden werden, wie man beym Winkel ACD (Fig. 36.) sieht. Hievon kommt es hernach, daß nicht die gehörige Länge der Linien auf den Maaßstab getragen wird, und daß, wenn die Theile desselben, die man, wie wir sehen werden, für Füsse annimt, sehr klein sind, man oft

von der wahren Länge der zu messenden Seiten um einige Fuß abweicht.

§. 125.

Um das Diopterlineal zu erforschen, suche man einen Ort aus, der in der Mitte zwischen zwey parallel liegenden Mauren eines Ganges, oder zwey Gebäuden, oder etwas andern von dieser Art (das wenigstens der parallelen Lage sehr nahe kommt) liegt, daß auf beyden Seiten eine weisse Tafel, die ohngefehr 6 oder 7 Fuß lang ist, angebracht werden kann. Ich will hier, um ein Beyspiel anzuführen, annehmen, daß es ein Gang von 70 oder 75 Fuß lang sey, den auf beyden Seiten eine Mauer einschlösse. Auf beyden Mauren mache man auf der, vermittelst des Bleywurfs perpendikulair hangenden Linie der Tafel, zwey schwarze Cirkel, welche im Diameter wenigstens drey Linien haben (denn alsdenn werden sie in einer Entfernung von 36′ noch unter einem Winkel von 2′ erscheinen), und deren Centra um 5 oder 6 Fuß voneinander entfernt sind. Oder, wenn es bequemer zu seyn scheinet, so hänge man an einem, auf beyden Seiten befestigten, Nagel Gewichte an dünnen Seilen, die im Diameter 3 oder 4 Linien halten, und wenigstens 5 oder 6 Fuß lang sind, auf, welche, wenn sie gehörig angezogen sind, und nicht schwanken, die vertikale Linie aufs genaueste geben. Man sezze die Mensul in die Mitte, und gebe ihr eine solche Lage, daß, wenn man gegen die Mauren visirt,

die

die Centra der schwarzen Cirkel entweder durch den Faden in der Diopter genau durchschnitten zu seyn, oder der Faden das Seil, woran das Gewicht hängt, zu dekken scheint. Läßt man das Lineal in dieser Lage, so muß man ebendasselbe bemerken, wenn man nach der entgegenstehende Mauer visirt. Geschieht dies nicht, so befinden sich die Dioptern nicht auf einerley Fläche, und müssen daher geändert werden. Erhält man es aber durch wiederholte Collineation, so zieht man nach der scharfen Linie auf dem Lineale eine feine Linie auf der Fläche der Mensul, wendet das Lineal um, und legt es so an diese Linie an, daß seine Schärfe sie dekket, alsdann sieht man durch die andern Dioptern nach beyde Mauren. Wenn theils die Cirkel genau geschnitten werden, theils die Seile mit dem Faden sich dekken, so sind die Dioptern recht gemacht. Scheinen die Faden aber die Seile oder die gerade Linie, die die Centra der Cirkel verbindet, der Queere nach zu durchschneiden, so beweist dieses, daß die Fläche der Dioptern nicht perpendikulair auf der Fläche des Lineals stehet, und daher muß man die Dioptern verbessern. Es kann endlich auch wohl kommen, daß zwar die Fläche der Dioptern auf der Fläche des Lineals perpendikulair stehet, aber nicht durch seine Schärfe gehet. Dieser Fehler ist noch auszustehn, da er nicht die Grösse der Winkel, die man durch das Diopterlineal aufnimt, ändert, sondern nur ihre Spitzen, ausserhalb der Fläche der Dioptern sezt.

Um aber auch dieses recht zu untersuchen, so merke man, daß wenn die Fläche der Dioptern nicht durch die Schärfe des Lineals geht, ein jeder Cirkel sich in einer parallelen Linie gegen den Faden der Dioptern befinden werde, so bald man das Lineal umkehrt. Man muß daher noch einen Gehülfen bey der Untersuchung haben, der bey einem jedem Cirkel in der Nähe an der Mauer zwey andere kleinere Cirkel oder andere willkührliche Kenntzeichen anbringt, die sich in gleicher perpendikulären Entfernung befinden, und von dem Faden in der Diopter akkurat bedekt werden. Sind die Centra der beyden neuen Cirkel, des obern und untern von denen, wozu sie gehören, und zwar in beyden Mauren gleich weit entfernt, so kann man sicher schliessen, daß die Dioptenlinie mit der Schärfe des Lineals parallel gehet; ist aber in einer Mauer die Entfernung zwar gleich, nicht aber so groß als in der andern, so kann die Linie der Dioptern nicht mit der Schärfe des Lineals parallel gehen: hebt man diesen Fehler nicht, so müssen die Winkel, die man mit diesen Dioptern aufnimt, falsch seyn. Die Grösse des Fehlers kann man berechnen, wenn man sagt: wie sich die Entfernung der Mensul zur Differenz der Entfernung der Cirkel (die von den Diopterfaden gedekt wurden) von den im Anfange gemachten Cirkeln verhält (welche bey der ersten Richtung des Lineals gedekt wurden), - so verhält sich der auf Minuten und Sekunden berechnete Radius zum vierten Termino, welcher dem Fehler des

Win-

Winkels gleich ist, wenn man das Lineal nach eben denselben Dioptern richtet: richtet man es nach den entgegenstehenden, so entsteht ein entgegengesetzter Fehler.

Von grössern Instrumenten, als den Quadranten, deren Radii wenigstens 2 Fuß lang sind, und welche mit Tubis und Mikrometern versehen werden, rede ich jetzt nicht. Wer wissen will, auf was für Art man sie vorzüglich zu untersuchen pflegt, der kann dieses bey praktischen Astronomen und aus den vortreflichen Werken derer jenigen lernen, die verschiedene Grade auf verschiedenen Meridianen der Erde gemessen haben. Ich empfehle vor den übrigen besonders das Werk des ehrwürdigen Paters Joseph Liesganig, welcher mit grosser Beurtheilungskraft, der lange Uebung in dieser Sache eine besondere Stärke gegeben hat, die beste Auswahl unter den Methoden getroffen hat.

Dritter Abschnitt.

Praktische Auflösung der Triangel.

§. 126.

Im lezten Abschnitte des vorigen Capitels trug ich trigonometrische Aufgaben vor, und zeigte, wie man aus gegebenen Theilen eines Triangels die übrigen durch Rechnung finden könne. Jetzt wollen wir sehen, wie die Auflösung selbst praktisch vorzunehmen ist, nachdem der An-

fänger sich eine hinreichende Kenntniß der beym Gebrauch nothwendigen Instrumente verschaft hat. Wir wollen daher jenen ganzen Unterricht mit der praktischen Auflösung der trigonometrischen Aufgaben, die wir hier beyfügen, verbinden.

§. 127.

Erste Aufgabe. Die Entfernung zweyer Oerter A, B zu messen, zu deren einem B man nur kommen kann. (Fig. 39.)

Erste Auflösung, durch die Mensul. Man nimt einen schiklichen Standpunkt C an, aus welchem man beyde Oerter A und B übersehen kann. In C sezt man einen Meßstab (wenn nicht schon daselbst ein anderes Merkmahl ist, das man aus B sehen kann) perpendikulair, vermittelst des Bleywurfs. Ist die Entfernung etwas groß, so befestige man eine schwarze Tafel mit einem weissen Kreutze, oder eine weisse mit einem schwarzen, ohngefehr in der Höhe der Mensul, an diesem Meßstab. Man nehme daher mehrere dergleichen b wegliche Tafeln mit sich, weil man sie häufig beym Messen gebraucht. Man sezze nun die Mensul in B, steche nicht weit vom Rahmen die Nadel ein, lege das Diopterlineal an sie an, visire damit nach A, und ziehe darauf nach der Schärfe dieses Lineals auf dem Papiere eine feine Linie Ba ohne bestimmte Länge. Hierauf läßt man die Mensul unverrükt

stehen,

stehen, und visirt mit dem Diopterlineale nach C, so daß es die Nadel B berührt, und genau auf C gerichtet ist. Man zieht hier gleichfals eine Linie Bc von unbestimmter Länge. Aus dem Punkte B, in welchem die Nadel befestigt ist, lasse man ein Perpendikel auf die Erde fallen, welches man vermittelst der Klammer CABD (Fig. 40.) sehr bequem verrichten kann, deren obere Seite sich in eine Spitze C endiget, und deren untere bey D, unter C, einen Bleywurf DE in einer Oefnung trägt. Die Entfernung beyder Seiten der Klammer C und D ist beynahe der Dikke der Mensul gleich. Wenn man also die Spitze C, die an der Seite AC befindlich ist, über dem Meßtisch nach den Punkt B bringt, so kommt der Bleywurf DE unterm Tische gleichfals an diesen Punkt. Auf dem Punkte, wo der Bleywurf die Erde berührt, stekke man einen andern Meßstab mit einer Tafel ein, nachdem man die Mensul weggenommen hat, nach der Vorschrift, die wir vorhin bey C gaben, und zwar so, daß die Fläche der Tafel nach C siehet. Man messe darauf entweder mit den zehnfüßigen Meßstäben, oder mit der Meßkette die Weite von B nach C (Erst. Abschnitt d. 2. Cap.). Ist man nach C gekommen, so trage man eben so viel Theile von einem geometrischen Maaßstabe, als man Fuß oder Klafter erhalten hat, mit dem Cirkel auf die Mensul, und zwar auf die Linie Bc aus B nach c, und nachdem man an diesen Punkt die eine Seite der Klammer AC gebracht

hat,

hat, so richte man die Mensul so, daß das Perpendikel E auf C fällt, wo vorher der Meßstab gestanden hatte. Man steche die Nadel in C ein, lege das Diopterlineal an die auf der Mensul gezogene Linie Cb, und gebe der Mensul eine solche Richtung (doch ohne daß der Punkt C von seiner Stelle kommt), daß das Objekt B oder der daselbst befestigte Meßstab durch die Dioptern erscheint. Wir werden diese Linie die Gewißheitslinie (linea fiduciæ) nennen, weil man alsdann erst sich sowohl auf den Winkel ABC, als auch auf den andern ACB verlassen kann, wenn man weiß, daß man von der Linie BC nicht abgewichen sey. Hat man endlich diese Linie gehörig gerichtet, und das Lineal um die Nadel C gedrehet, ohne daß dadurch die Mensul aus ihrer Lage gebracht ist, so visire man aus C nach A, ziehe die Linie Ca, bis sie endlich die Linie ba, die zuerst auf der Station B gezogen war, durchschneidet. Man nimt nun den zwischen a und b gelegenen Raum mit dem Zirkel auf, und bringt ihn auf eben den geometrischen Maaßstab, nach welchem man die Theile der Linie bC bekommen hatte. Die Zahl der mit dem Maaßstabe übereinkommenden Theile der Linie ab wird der Zahl der Füsse oder Klafter der Entfernung AB gleich seyn. Der Grund hiervon ist leicht einzusehen. Denn da der Winkel ABC dem Winkel abC gleich, und der Winkel bey C beyden Triangeln gemein ist, so sind sich die Triangel

ABC

ABC und abC ähnlich; deswegen verhält sich bC : ba = BC : BA.

§. 128.

Erste Anmerkung. Oft trägt es sich zu, daß wenn man statt der Füsse der Seite BC ganze Linien vom geometrischen Maaßstabe gebraucht, die Linie bC auf der Mensul zu groß wird, so daß der Triangel ausserhalb des Rahmens fällt; wenn aber dafür Zehentheile von einer Linie genommen würden, so würde der Triangel abC zu klein werden. Wenn in diesem Falle auf dem geometrischen Maaßstabe sich keine schikliche Eintheilung finden läßt, so kann man eine jede beliebige Länge auf dem Maaßstabe für die Linie bC annehmen. Z. B. die Linie BC sey 224′; man nehme für bC 50‴, und finde nun nach vollbrachter Messung die Linie ab = 82,3‴; so sezze man folgendes Verhältniß auf, 50 : 82,3 = 224 : x (= 369), so wird BC nahe an 369′ seyn. Mit noch leichterer Mühe kann man die Hälfte der gefundenen Linie nehmen, wenn die Theile des Maaßstabes etwas zu groß scheinen sollten; oder sonst eine Grösse, die so groß ist, daß man hernach die Zahl der gleichen Theile, welche der Seite ab zukommen, nur verdoppeln oder dreyfach nehmen darf, u. s. w.

§. 129.

Zweyte Anmerkung. Was wir von dem Hinsetzen der Meßstäbe, der Befestigung der Tafeln und Herablas-

sung

sung des Senkbleyes bey dieser Auflösung gesagt haben, werden wir inskünftige als vorausgesezt annehmen, und ohne besonderes Erforderniß nichts weiter davon sagen.

§. 130.

Zweyte Auflösung, durch den Winkelmesser. Hat man in C sich einen bequemen Standpunkt ausgesucht, und ein Zeichen daselbst befestigt, so sezze man in B das Centrum des Winkelmessers fest (gleichfals vermittelst des Senkbleyes), und richte die festen Dioptern nach C, so daß der Faden das Zeichen C perpendikulair zu schneiden scheinet, das bewegliche Diopterlineal richte man nach A, bis man A in seinen Dioptern, so wie es seyn muß, erhält. Man zähle nun die Grade zwischen den beyden Dioptern, so hat man den Winkel ABC. Man nehme darauf den Winkelmesser weg, sezze eine Meßstange in B hin, und messe die Weite BC, schreibe die Zahl der Klafter, Füsse und dergleichen genau auf; darauf sezze man das Centrum des Winkelmessers in C ein, sehe durch das feste Lineal aus C nach B, und durch das bewegbare aus C nach A, um den Winkel ACB zu erhalten. Hierdurch erhält man auch den dritten CAB. Daher sagt man alsdann: Sin. A : sin. C = BC : AB.

§. 131.

Zweyte Aufgabe. Die Weite zweyer Oerter, A, B (Fig. 41.) zu messen, zu deren keinem man kommen kann.

Erste

Erste Auflösung, durch die Mensul. Man wähle zwey bequeme Standpunkte D und E, sezze die Mensul in D, visire nach E, A und B, und ziehe die Linien De, Da und Db von unbestimmter Länge. Man messe die Grundlinie DE, und trage die Zahl der Füsse von DE in Theilen des Maaßstabes von D nach e, so daß De so viel Theile des Maaßstabes erhält, als DE Füsse hat. Man sezt darauf die Mensul mit dem Punkt e in E (nach §. 127.), visirt nach D, B und A, und zieht die Linien Eb und Ea, welche die Punkte b und a abschneiden, deren Entfernung auf dem Maaßstabe die Zahl der FüsseAB angeben wird.

Es sind nehmlich die Triangel BED und bEd wegen der gemeinschaftlichen Winkel bey E und d oder D einander ähnlich. Eben so sind sich die Triangel ADE und adE ähnlich, deswegen müssen auch die Triangel AEB und aEb einander ähnlich seyn, und das ganze Trapezium aEdb dem Trapezio AEDB, wie dies deutlich am Tage liegt.

Zweyte Auflösung, durch den Winkelmesser. Aus den Standpunkten D und E nehme man eben die Winkel ADE, ADB und AEB und BED. Weil in dem Triangel EBD drey Winkel gegeben werden (denn die beyden BDE und BED sind erhalten), ingleichen eine Seite ED, welche man gemessen hat, so findet man EB. Eben so erhält man wegen der erhaltenen Winkel und der Seite

ED im Triangel AED, die Seite AE. Dem zu folge hat man im Triangel AEB zwey Seiten EA und EB nebst dem erhaltenen Winkel, der dazwischen liegt, und man kann dadurch die dritte Seite AB finden (§. 74.).

§. 132.

Anmerkung. Wenn die Gegenstände sich nicht auf einer horizontalen Ebene, wenigstens dem Scheine nach, befinden, so ist zwischen ihren wahren Entfernungen und der Entfernung der horizontalen Lage ein grosser Unterschied. Denn es erscheint z. B. die wahre Entfernung der Objekte A und B (Fig. 42.) unter dem Winkel ACB, die horizontale unter dem Winkel DCE. Ist die Lage des Instruments mit der horizontalen Lage der Objekte parallel, und erscheinen die Objekte durch die Dioptern auf dem perpendikulairen Faden, so wird man den Winkel DCE, nicht aber ACB erhalten. Verlangt man den leztern, so muß ein jedes Objekt auf der Fläche des Instruments oder des Triangels BCA erscheinen; man muß daher diese Fläche des Instruments alsdann so wenden und richten, daß die Objekte in den Mittelpunkten der Faden oder in andern, die vom Ende gleich weit sind, erscheinen. In diesem Falle ist es rathsam, in einer jeden Diopter Faden zu haben, die sich in gleicher Weite durchschneiden, und statt des längern Einschnittes ein kleines cirkelförmiges Loch, wodurch man siehet. Man bedient sich aber häufiger

der

der längern und höhern Dioptern, wenn eine Gegend auf eine Charte soll aufgenommen werden, indem zu solchen Arten topographischer Zeichnungen nicht Winkel wie BCA, sondern horizontale ECD erfodert werden. Wenn sich daher eine solche Höhe als die Objekte A, B über der horizontalen Fläche befände, so würden sie durch die Dioptern ru, mo (Fig. 38.) auf dem Lineale AB, wenn es horizontal stünde, nicht gesehen werden können; dann wären aber jene kleinere Dioptern QPOB und LKIH, welche sich auf der längern DH befinden, zu gebrauchen. Denn (Fig. 43.) ist die Diopter DH unter einem solchen Winkel HDC über dem Lineale EFAD aufgestellt, daß wenn man durch die Spalte zy in der Diopter QPO sieht, das Objekt auf dem Faden qr der entgegenstehenden Diopter LKIH erscheint. Da zy und qr vermöge der Einrichtung des Lineals auf ebenderselben Fläche vertikal stehen bleiben, worauf sich die Schärfe des Lineals EF befindet, so ists offenbahr, daß man den Winkel BCA auf einer horizontalen Fläche ECD erhält (Fig. 42.), wenn man auf diese Art das Diopterlineal gegen die Objekte A und B richtet. Sollte man aber ja ein solches Lineal nicht bey der Hand haben, oder sich eines Winkelmessers bedienen, so muß man, um den Winkel BCA zu erhalten, ihn auf den horizontalen DCE reduciren. Denn (wie aus dem Gegenstande der Aufgabe deutlich gesehen wird) man hat beyde Höhen AD und BE zu messen, und nicht allein den Winkel BCA,

sondern auch BCE und ACD aufzunehmen. Ist der Triangel BCA aufgelöst, so wird die Seite AB erhalten, und hat man die beyden Höhen AD und BE, so hat man auch ihre Differenz AF. Denkt man sich nun die gerade Linie BF mit der horizontalen ED parallel, so wird in dem rechtwinklichten Triangel ABF, wenn BA und AF gegeben ist, BF = ED gefunden werden. Weil auch durch die Auflösung der rechtwinklichten Triangel ADC und BEC auch die Seiten DC und EC erhalten werden, so werden in dem horizontalen Triangel EDC drey Seiten gegeben, und daraus können die Winkel gefunden werden.

§. 133.

Diese Reduktion der aufgenommenen Winkel B, C, A auf die Horizontalfläche geschieht sonst, wenn die Seiten etwas groß sind, und die Verschiedenheit der Höhen der Oerter B, A, C beträchtlich ist, durch Hülfe der sphärischen Trigonometrie; indessen ist bey kleinern Triangeln die angezeigte Methode hinreichend. Sollte man keine merkliche Differenz zwischen den Höhen AD und BE finden können, so wäre die Entfernung AB der Seite ED gleich, wie sich von selbst versteht. Unten werde ich von der Reduktion der Winkel auf den Horizont weiter reden.

§. 134.

Dritte Aufgabe. Eine Höhe KI, zu der man kommen kann, zu messen (Fig. 44.).

Auflö-

Auflösung. Man sezze den Winkelmesser perpendikulair in einer solchen Entfernung, daß der Winkel nicht zu klein werde. Das feste Lineal AB muß sich in einer horizontalen Lage befinden, welche man entweder durch ein aus dem Centro C gelassenes Senkbley CG, das an einem zarten Faden hängt, und auf dem Rande 90 Grad abschneidet, oder durch eine Wasserwage erhält, die man an BA anbringt (Fig. 22.), bis die Luftblase in ihrer Mitte zu liegen kommt.

Besser scheint mir hier der Gebrauch des Bleywurfs zu seyn, dessen Faden den Rand des Instruments sehr nahe berühren muß, doch nicht so nahe kommen darf, daß dadurch seine Bewegung nach der rechten und linken Seite gehindert wird. Hierdurch verhindert man es, daß die Fläche des Instruments sich nicht nach einer Seite hinneigt. Hat man das Instrument gehörig gestellt, so nehme man den Winkel ACD = KCH. Aus C lasse man ein Perpendikel auf L fallen, und messe die Entfernung LI = CH. Man wird in dem rechtwinklichten Triangel einen rechten Winkel bey H, hiernächst C und die Seite HC haben, und daraus KH finden, und wenn man die Höhe des Instruments CL = HI dazu addirt, die ganze Höhe KI erhalten.

§. 135.

Anmerkung. Will man Höhen messen, so ist der Gebrauch der Mensul nicht bequem, weil man auf ihrer

Fläche, wenn sie vertikal gestellt wird, die Dioptern nicht gut richten und Linien ziehen kann. Viel besser könnte man das Lineal in der Lage, als es Fig. 43. hat, gebrauchen, daß man nehmlich, wenn man durch die kleinern Dioptern visirt hat, aus H ein Perpendikel auf die Fläche des Lineals EF fallen liesse, und die Entfernung des Punkts, worauf es fällt, von D mässe. Hat man die Linie DH, die Entfernung des Perpendikels von D, und die Höhe des Perpendikels von H bis zur Fläche des Lineals auf einen Maaßstab übergetragen, so wird man durch eine einfache Proportion eine jede gesuchte Höhe herausbringen können, wenn man ausserdem die Grundlinie LI mißt (Fig. 44.). Eine ähnliche Proportion haben wir im 128. §. angeführt.

§. 136.

Vierte Aufgabe. Eine Höhe KI zu messen, zu welcher man nicht kommen kann (Fig. 44.).

Auflösung. Es sey der Zugang zu KI auf der geraden Linie lLI bis L frey. Man messe auf dem Standpunkte l den Winkel $acd = KcH$, nachdem man den Winkelmesser in eine vertikale Lage gerichtet hat. Man messe darauf die Grundlinie $lL = cC$, und nehme den Winkel $ACD = KCH$ auf, nachdem das Instrument in L wiederum vertikal aufgerichtet worden ist. In dem

Trian-

Triangel KCc wird man drey Winkel und die Seite Cc erhalten, daher KC bekommen (denn KCc, dessen Supplement KCH ist, und KcC hat man erhalten, folglich auch CKc.). Nun erhält man auch in dem rechtwinklichten Triangel KHC den Winkel bey C (weil KCH das Supplement zu KCc ist), ingleichen die Seite KC, folglich findet man auch KH, und wenn CL (= HI) dazu addirt wird, die ganze Höhe KI.

§. 137.

Anmerkung. Nimt man die Standörter auf einer geraden Linie ILl, so geschieht es leicht, daß die Winkel bey c zu klein werden. Daher kann man diese Aufgabe auf eine andere Art sicherer auflösen.

Man wählt zwey Standpunkte C und D (Fig. 45.), stellt hierauf die Fläche des Winkelmessers so, daß sie sich auf der schiefen Fläche des Triangels CKD befindet, und nimt die Winkel KCD und KDC; man erhält dann auch den dritten CKD. Hat man darauf die Grundlinie NM = CD gemessen, so wird man die Seite DK erhalten.

Nachdem man auf dem Standpunkte D den Winkel KDC gemessen hat, so gebe man dem Winkelmesser eine perpendikulaire Richtung, und messe in dem vertikalen Triangel KDH den Winkel KDH, so wird man darinn,

auſſer dem rechten Winkel bey H, noch den bey D und die Seite KD haben, daher auch KH und KI finden.

§. 138.

Man ſiehet leicht, daß das, was von der Höhenmeſſung geſagt worden iſt, auch auf die Meſſung der Tiefen angewendet werden könne, als wenn man z. B. die Tiefe eines Grabens, deſſen Breite entweder ſchon bekannt iſt, oder aus einem doppelten Standorte gefunden werden kann, meſſen wollte. Obgleich die Meſſung groſſer Entfernungen nicht genau vorgenommen werden darf, wenn man ſich kleiner Inſtrumente bedienet, ſo will ich doch folgende Aufgabe hinzufügen, damit die Anfänger einige Ideen von den groſſen Meſſungen bekommen.

§. 139.

Fünfte Aufgabe. Die Weite zweyer Oerter A und B (Fig. 46. n. 1.), die ſehr groß iſt, zu meſſen, wenn man aus B den Ort A ſehen kann.

Auflöſung. Man mache mehrere Triangel, als ACD, DCE, ECF, FEB, die man durch einen kleinen Winkelmeſſer genau genug auflöſen kann. Wäre AB noch gröſſer, ſo müßten mehrere Triangel angebracht werden; wäre es kleiner, ſo könnten weniger genommen werden. Die Standpunkte D, C, E, F muß man, wenn es angehen will,

will, so wählen, daß AB die Seiten der Triangel fast in der Mitte schneidet. Vor zu kleinen Winkeln muß man ausserdem sich hüten. Die ganze Figur entwerfe man so obenhin auf ein Papier, damit man beym Aufzeichnen keine Fehler begehe.

Geht es an, so nehme man alle drey Winkel bey den kleinen Triangeln auf, damit man sehen möge, in wie fern ihre Summe über oder unter 180° ist, und wissen könne, in wie weit man der Meßung trauen dürfe. Geht es nicht an, so messe man wenigstens zwey Winkel. Man messe ausserdem in dem Triangel ACD eine Seite, etwan AD. Da die Winkel gegeben sind, so wird man auch die Seiten AC und CD finden. In dem Triangel CDE wird man, nach erhaltener Seite CD und Winkeln, die Seiten DE und CE erhalten. Darauf suche man aus den Winkeln und der Seite CE, die Seiten CF und FE im Triangel CEF, und endlich aus dem schon bekannten FE und Winkeln die Seiten FB und EB im lezten Triangel. Weil man annimt, daß man A aus B sehen könne, so messe man, so genau als es angehn will, die Winkel CAB, DAB, FBA und EBA. Man ziehe auf die gerade Linie AB aus E und D (oder auch aus F und C, oder allen zugleich) die Perpendikel EH, DK oder auch FG und CI. In dem Triangel BHE, der bey H rechtwinklicht ist, erhält man den Winkel HBE und die Seite EB. Man kann daher BH finden, ingleichen HE. Eben so erhält

man in dem rechtwinklichten Triangel AKD, wegen des rechten Winkels bey K, des gegebenen KAD, und der Seite AD, die Seite AK und KD. Hat man die Perpendikel KD und HE, so hat man auch ihre Differenz nD, und nimt man nE für parallel mit KG oder AB an, so wird in dem bey n rechtwinklichten Triangel nDE, die Seite DE ingleichen nD gegeben seyn, und nE (= KH) gefunden werden. Die Theile AK, KH und HB machen die gesuchte Länge AB aus. Eben dies konnte man durch die Triangel BFG, ACI und CFo finden. Hat man mehrere Perpendikel, so kann man ihre Differenz auch so finden. In dem Triangel ADK wird der Winkel ADK gegeben, das Complement des Winkels KAD zu 90°. Zieht man dasselbe von der Summe der bekannten Winkel ADC und CDE ab, so bleibt der Winkel KDE oder nDE übrig, und aus diesem und der Seite DE findet man nE = KH.

§. 140.

Will man seine Arbeit berichtigen, so muß man auser der Seite AD, auch in dem leztern Triangel eine Seite, etwa FB messen, und von da aus die Rechnung anfangen, bis man nach AD kommt. Wenn die Rechnung diese Seite eben so groß angiebt, als die wirkliche Messung sie angegeben hat, und man hernach wiederum FB, wenn man den Anfang in ADC nimt, eben so groß findet, so kann man wegen der Richtigkeit seiner Arbeit sicher seyn; oder

man

man wird gewiß aus der Grösse des Unterschiedes leicht abnehmen können, in wie weit man sich darauf verlassen könne.

Da übrigens bey einem solchen Vornehmen, als dieses ist, sich selten Triangel auf einer horizontalen Fläche befinden, sondern die Spitzen derselben gewöhnlich auf etwas erhabenen Orten zu stehen kommen; so muß man alle Triangel auf einerley Horizont reduciren, von welcher Reduktion ich, wie ich vorher schon gesagt habe, hernach reden werde, in so fern man hier durch die ebene Trigonometrie etwas ausrichten kann. Geht die Arbeit ins sehr Grosse, so daß die Seiten der Triangel einige tausend Klaftern lang sind, so muß noch manches andere bemerkt werden, was wir ietzt nicht berühren wollen, da es meinen Vorsatz überschreitet.

Wenn übrigens auch die Voraussetzung bey dieser Aufgabe in so weit geändert wird, daß man aus dem einem Orte den andern nicht sehen kann, so kann man sie auf folgende Art auflösen, welche zwar nicht so sicher ist, aber doch dem vielleicht einmahl nützlich werden kann, der keine astronomische Hülfsmittel anwenden kann. Man muß nemlich zuerst die Lage zweyer Seiten bestimmen, von denen die eine zum äuserstен Triangel der einen Grentze, und die andere zum äuserstен Triangel der andern gehört. Es seyn (Fig. 46. n. 2.) A und B die Grentzen. Man

habe die Triangel ACD, DCE, ECF, FEG, EGH, HGB. Man ziehe zwey grosse Cirkel a A α und b B β durch A und B, welche Meridiane vorstellen, und wenn AB nur einige tausend Klafter lang ist, so kann man sie, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, für gerade Parallellinien halten. Findet man entweder durch die Magnetnadel, oder durch ein besseres horologisches Instrument den Winkel αAC oder aAD (denn einer ist hinreichend, weil, wenn wegen des bekannten Winkels CAD und der Summe αAC + CAD + DAa = 180°, einer von den äusersten gegeben wird, man auch dadurch den andern erhält), nimt man hiernächst die Seite AD als so weit ausgezogen an, bis sie in b den Meridian bBβ erreicht, und stellt eben eine solche Beobachtung des Winkels HBb an der Grentze B an, zieht die Seite BH nach a, wo sie den andern Meridian aAα erreicht, so hat man die ähnlichen Triangel Aca, Bcb, und der Winkel cAa = cbB; caA = cBb. Da diese schon bekannt sind, so erfährt man auch den dritten bey c, und daher auch sein Supplement DcH. Ausser diesem nehme man an, es sey eine gerade Linie DH gezogen. In den Triangeln DCE, CEF, FEG, GEH sind alle Winkel bey E bekannt, und weil sie mit DEH vier rechte Winkel machen, so erhält man in dem Triangel DEH den Winkel, der von den bekannten Seiten ED und EH eingeschlossen ist. Man findet von da aus auch die Seite DH, ingleichen die Winkel

EDH

EDH und EHD. Weil nun ADC + CDE + EDH bekannt sind, so weiß man auch ihr Supplement HDc; eben so weiß man auch DHc, das Supplement der drey bekannten Winkel DHE, EHG und GHB. Deswegen wird in dem Triangel DcH die Seite DH und drey Winkel gegeben, folglich Dc und cH gefunden. Daher erhält man die Summe AD + Dc, ingleichen BH + Hc, und in dem Triangel AcB werden die Seiten cA, cB mit dem zwischen ihnen liegenden Winkel gegeben seyn, und AB können gefunden werden.

Doch diese Messung kann erstlich nicht genau genug seyn, da die Lage der Seiten AC und AD; ingleichen BG und BH in Rüksicht auf den Meridian weder durch die Magnetnadel noch durch Sonnenzeiger richtig genug bestimmt werden kann. Zweytens müssen schlechterdings die Triangel auf einerley Horizont reducirt werden, weil sonst Aca und Bcb sich nicht auf einerley Fläche befänden. Diese Ungewißheit, die in Absicht der Winkel entsteht, welche durch die Magnetnadel erhalten werden, wovon wir viel Ursachen angeben könnten, ist es vorzüglich, die uns bewogen hat, bey dieser ganzen Abhandlung solche Messungen nicht zu berühren, welche auf eine so unsichere Art angestellt werden, und die wir nur in dem Falle für anwendbar halten, wenn andere wegfallen.

§. 141.

Sechste Aufgabe. Wenn (Fig. 39.) in dem Triangel ABC drey Winkel und die Differenz der Seiten gegeben wird, die Seiten zu finden.

Auflösung. Wenn der Winkel B gegeben wird, so verhält sich (§. 74.) $AB + BC : AB - BC = \text{tang.}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C) : \text{tang.}(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A)$. Es sey die Summe der Seiten $= x$, die Differenz $= a$, so wird $\text{tang.}(\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A) : \text{tang.}(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A) = a : x$. Man erhält also die Summe $AB + BC$ aus dieser simpeln Gleichung, und weil man aus den Winkeln weiß, welche Seite grösser oder kleiner sey, so erhält man die grössere $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, und die kleinere $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a$.

§. 142.

Siebente Aufgabe. Die Weite CA und CB zu finden (Fig. 47.), wenn die Theile AD und DB der geraden Linie AB, ingleichen die Winkel ACD und DCB gegeben sind.

Auflösung. Man denke sich einen um den Triangel ABC beschriebenen Cirkel, verlängere CD nach F, und ziehe die Sehnen AF und FB. Weil AD und DB gegeben werden, so wird auch ihre halbe Summe EB gegeben, und denkt man sich den Radius BO mit OE aus dem Centro auf die halbe Sehne perpendikulair,

so

so wird EOB = ACD + DCB seyn, da jener ein Centriwinkel ist; diese sich an der Peripherie befinden. Daher verhält sich OB : BE = R : sin. ACB. Man erhält daher den Radius des Cirkels, woraus man die Sehnen FB (= 2 sin. DCB) und AF (= 2 sin. ACD) finden wird. In dem Triangel ADF wird man nun schon zwey Seiten AD und AF und den dazwischen befindlichen Winkel FAD = FCB oder DCB haben. Man wird folglich den Winkel ADF finden. Hat man ihn, so erhält man in dem Triangel ACD die Winkel ACD, ADC mit der Seite AD, man kann ihn daher auflösen und AC finden. BC findet man leicht, da ABC = ADC — DCB gegeben ist, ingleichen da ACB bekannt ist, auch die Seiten AB und AC.

§. 143.

Lehnsatz. Wenn in einem Triangel ACB (Fig. 48.) aus dem Mittelpunkte D der Seite AB eine gerade Linie DC gegen den entgegengesetzten Winkel C gezogen wird, so werden die Sinus der Winkel, in welche der Winkel C getheilt wird, sich in dem verkehrten Verhältniß der Seiten CA und CB, die an ihnen liegen, befinden, oder sin. ACD : sin. DCB = BC : AC.

Beweis. In dem Triangel ADC verhält sich AD : DC = sin. ACD : sin. A, und im Triangel DCB verhält sich DB oder AD : DC = sin. DCB : sin. B. Deswegen

verhält

verhält sich sin. ACD : sin. DCB = sin. A : sin. B. Aber sin. A : sin. B = BC : AC, folglich auch sin. ACD : sin. DCB = BC : AC. W. Z. E. W.

§. 144.

Achte Aufgabe. Wenn (Fig. 48.) in dem Triangel ABC die Seite AB, ingleichen des Verhältniß der Seiten AC : CB = m : n und der, der gegebenen Seite gegenüber stehende Winkel C gegeben wird, die Seiten AC, CB zu finden.

Auflösung. Man nehme einen Radius von beliebiger Grösse CG, und denke sich einen aus C beschriebenen Bogen GLH. Da der Winkel GCH gegeben ist, so wird man die Sehne GH nach dem angenommenen Radius = 2 sin. $\frac{1}{2}$C finden. Man sage: m + n : n = GH : GI. Aus dem 476. und 479. §. der Geom. zeigt es sich, da HI : IG = m : n, so werden auch die Sinus der Winkel LCH und LCG sich in eben dem Verhältniß m : n = AC : CB befinden. Wenn daher (dem Lehnsatze zu Folge) durch I eine gerade Linie CID gezogen wird, so wird dieselbe durch den Mittelpunkt D der gegebenen Seite AB gehen. Hat man also die Winkel ACD und DCB zugleich mit den Theilen AD und DB gefunden, so ist die Aufgabe auf die vorhergehende reducirt, und man wird, wenn man den Cirkel AFBC um den Triangel gezogen

zogen hat, ebendieselbe Auflösung anbringen können, die wir daher nicht wiederholen wollen.

§. 145.

Zusatz. Da auch DF den Winkel AFB (das Complement des gegebenen Winkels C zu 180°) schneidet, so wird sin. AFC : sin. CFB = FB : AF. Es ist aber AFC = ABC und CFB = CAB; daher auch sin. AFC : sin. CFB = sin. ABC : sin. CAB, = FB : AF = AC : CB. Kann man also aus dem gegebenen Verhältniß der Seiten m und n die Sinus der Winkel CAB und CBA finden, so wird BC gefunden werden, wenn man sagt: sin. ACB : AB = sin. CAB : BC, u. s. f.

§. 146.

Neunte Aufgabe. Es wird der Triangel ABC (Fig. 49.) nebst den Winkeln ADB und BDC gegeben, man soll die Entfernungen der Winkel A, B, C von dem Punkte D finden.

Auflösung. Man beschreibe durch A, C, D einen Cirkel, dessen Radius AO aus der gegebenen Linie AC und dem Winkel ADC, wie §. 142. gezeigt ist, gefunden wird, ferner die Sehnen AG und GC, welche die gegebenen Winkel ADB und BDC überspannen. Es ist nun GCA = ADB, und ACB wird gegeben, folglich hat man auch die Differenz GCB der Winkel ACB und

ACG,

ACG, und in dem Triangel GCB zwey Seiten GC und BC mit dem dazwischen liegenden Winkel. Man wird daher auch den Winkel GBC finden, und erhält nun schon in dem Triangel BDC zwey Winkel, DBC und BDC, ingleichen die Seite BC, woraus leicht die übrigen Seiten BD und CD gefunden werden. In Absicht der Entfernung AD findet sich keine Schwierigkeit ferner, da in dem Triangel ACD die Seiten AC und CD und der Winkel ACD bekannt sind. W. Z. F. W.

Anmerkung. Wenn die Spitze eines Winkels, als B (Fig. 50. nr. 1.), in einem gegebenen Triangel innerhalb des Cirkels fällt, so wird dies in so fern einen Unterschied in der Auflösung machen, daß der Winkel GCB nicht die Differenz, sondern die Summe der Winkel GCA (oder BDA) und ACB ist. Der Nutzen dieser Aufgabe kann sich besonders bey der Verfertigung einer Landcharte zeigen. Sind einmahl drey Oerter A, C, B genau bestimmt, so wird jeder vierte leicht gefunden werden, so weit er auch von diesen dreyen abliegen mag, wenn man von ihm aus (nemlich aus D) die Winkel ADB und BDC betrachtet. Lägen aber diese drey Oerter in einer geraden Linie, so würde die 7. Aufgabe (im 142. §.) gebraucht werden können.

§. 147.

Zehnte Aufgabe. Wenn in einem Triangel ABC (Fig. 50. n. 2. 3.) eine Seite AC mit dem ihr entgegenste-

henden

henden Winkel B und dem Punkte D, worauf das aus B auf AC gelassene Perpendikel fällt, gegeben ist, die übrigen Theile des Triangels zu finden.

Auflösung. Man denke sich einen Cirkel um den Triangel beschrieben, und den Bogen, den die gegebene Seite AC umspannt, in M in zwey gleiche Theile getheilt, so wird MB den gegebenen Winkel B in zwey gleiche Theile theilen. Es sey CBN das Complement des halben Winkels B oder MBN = 90°. Die gerade Linie MN wird der Diameter seyn, und die Sehne AC in R theilen. Weil nun ein jeder Winkel ABM und ACM auf einerley Bogen AM stehet, so sind sie einander gleich, und man findet in dem rechtwinklichten Triangel MRC, weil RC $= \frac{1}{2}$AC gegeben ist, die Seite RM, folglich auch RN, da $\frac{AR^2}{RM} =$ NR; daher wird der Radius des Cirkels OM oder OQ gegeben. Weil hiernächst der Punkt D gegeben ist, so hat man AD und AR, daher auch DR. Man findet folglich in dem rechtwinklichten Triangel QOP den Winkel gleiches Nahmens. Es ist aber deutlich, daß AOM = ABC, und AOQ = 2ABD; man weiß also auch die Hälfte davon ABD, und ihr Complement BAC nebst dem dritten Winkel C ergiebt sich ohne Mühe. Hat man die Winkel und die Seite AC, so findet man das übrige leicht.

§. 148.

Eilfte Aufgabe. Es werden (Fig. 51.) in dem Trapezio ABCD vier Winkel und zwey einander entgegenstehende Seiten gegeben, als AB und CD; man soll die übrigen beyden Seiten finden, deren Verhältniß zueinander gleichfals gegeben wird.

Anflösung. Erster Fall, wenn die gesuchten Seiten nicht parallel sind. Man sieht es leicht aus den Winkeln, ob zwey von den Seiten parallel sind. Wir wollen 1) annehmen, es wären die gesuchten Seiten BC und AD nicht parallel. Die gegebenen AB und CD (oder Cd) mögen parallel seyn, oder nicht, so verlängere man die gesuchten Seiten nach E, bis sie zusammenstossen. Man erhält nun zwey Triangel ABE und CDE (oder CdE), in welchen alle Winkel A, B, E; ingleichen DCE, CDE (als Supplemente der gegebenen Winkel BCD und ADC) und E mit den Seiten AB und CD (oder Cd) gegeben sind. Man findet daher die Seiten BE und AE; CE und DE, deren Differenzen die Seiten des Trapezii, die man suchte, BC und AD (Ad) sind.

Der zweyte Fall, wenn die gesuchten Seiten AB und Cd parallel laufen, und BC ingleichen Ad, hiernächst das Verhältniß BA : Cd gegeben ist. Bey dieser Hypothese sind die Triangel ABE und dCE einander ähnlich, und das Verhältniß der Seiten ist AB : dC = AE : dE.

Es

Es sey dieses Verhältniß m : n, so sage man: m — n : n = AE — dE : dE, oder m — n : n = Ad : dE. Weil Ad gegeben wird, so erhält man auch dE, und daher von dem Triangel dCE die Grösse dC selbst, folglich auch AB.

§. 149.

Zwölfte Aufgabe. Den Platz des Polygons ABCDE (Fig. 52.) zu messen und aufzutragen.

Auflösung. Erster Fall, wenn man in den Platz hineinkommen kann. Man wähle innerhalb des Platzes zwey schikliche Standpunkte G und F, deren Entfernung nicht viel kleiner ist als die Seiten, und deren Richtung durch keinen Winkel des Polygons geht. In G nehme man alle Winkel auf, als DGF, CGF, BGF, AGF, EGF; eben so nehme man in F (nachdem man in G ein Zeichen hat stehen lassen, und die Linie GF gemessen ist) die Winkel DFG, CFG, BFG, AFG, EFG. Auf der Mensul bezeichnen diese Linien selbst durch ihre Durchschnitte die Punkte D, C, B, A, E, welche den Umfang des Platzes geben, wenn man sie durch Linien verbindet.

Nimt man aber die Winkel durch einen Winkelmesser auf, so findet man aus dem Triangel FGD, worin man FG und alle Winkel hat, die Seiten FD und GD. Eben so die Seiten FE und GE in dem Triangel FEG aus FG

und den Winkeln. Da die Winkel EGF und DGF schon bekannt sind, so ist auch ihre Differenz bekannt, nemlich EGD. Daher werden in dem Triangel EGD die Seiten GE und GD gegeben, nebst dem zwischen ihnen liegenden Winkel. Man findet daraus die übrigen und die Seite ED. Eben so ist der Winkel AFG und EFG, und folglich auch AFE bekannt, welcher letztere die beyden erstern zu vier rechten Winkeln ergänzt. Aus dem Triangel FAG wird FA überdem gefunden, weil alle Winkel nebst der Seite FG bekannt sind. Folglich hat man in dem Triangel AFE wieder zwey Seiten FA und FE, die den gegebenen Winkel F einschliessen, man findet nun aus ihnen die übrigen Winkel mit der dritten Seite AE. Auf diese Art wird man den Polygonwinkel DEA, der aus den beyden AEF und FED besteht, und zwey Seiten haben. Es ist aber deutlich einzusehen, daß auf gleiche Art die übrigen Seiten mit den Winkeln gefunden werden können, und es ist nicht nöthig, daß wir uns bey einer so deutlichen Sache länger verweilen sollten. Hat man die Winkel und Seiten, wie es sich gehört, berechnet, so trägt man eine ähnliche Figur durch den verjüngten Maaßstab und Transporteur aufs Papier.

Zweyter Fall, wenn der Platz nicht betreten werden, aber man doch an ihn kommen kann.

Auflösung. Man nehme (Fig. 53.) die Winkel ABC, BCD, CDE bis auf zwey, der Ordnung nach, auf, so auch BCA, ACE, CBD und ECD, und messe eine Seite als BC. In dem Triangel BCA wird, ausser den Winkeln, auch die Seite BC gegeben, und man findet AB und AC. Hernach findet man auf gleiche Art aus den bekannten Winkeln und der Seite BC die Seite CD. Darauf wird in dem Triangel CDE, da die Winkel ECD und CDE nebst der Seite CD bekannt sind, auch CE und ED erhalten. Endlich kann in dem Triangel ACE aus AC und CE mit dem dazwischen liegenden Winkel C die Seite AE gefunden werden, und man wird so alle Seiten und Winkel des Polygons erhalten.

Anmerkung. Ist die Aussenseite des Polygons sehr irregulair, wie das Ufer der See abcdefghik, so muß man die Standpunkte A, B, C, D, E so nehmen, daß die geradelinichten Seiten den irregulairen Umfang so schneiden, daß sie fast eben so viel Raum bey k, h, f, u. f. abschneiden, als bey den Winkeln i, g, e, u. f. wieder zukommt.

Dritter Fall, wenn nicht allein das Polygon nicht betreten werden, sondern man auch nicht einmahl daran kommen kann, als wenn z. B. um eine Festung ein befestigter Graben abcde (Fig. 54.) gezogen wäre.

Auflösung. Man wähle einen Standpunkt in H, der mit DC in gerader Linie liegt, hiernächst einen andern in I, der sich mit EA gleichfals in gerader Linie befindet. Man messe IH, und nehme die Winkel IHD, IHE, EID und DIH. Auf gleiche Art nehme man auf den verlängerten Linien ED und BC die Standpunkte G und F an, und nehme den Winkel DHG und HGD. Man sieht deutlich, daß in dem Triangel DIH die Seiten ID und DH gefunden werden, ingleichen in EHI, EI. Hiernächst ergiebt sich in EHD aus den beyden Seiten HE und HD und dem dazwischen eingeschlossenen Winkel die Seite ED, und da man schon DH hat, so wird eben so der Triangel, DHG, DFG, CGF u. f. gefunden werden, wie man leicht siehet, wenn man darauf Acht giebt. Nimt man daher gegen die übrigen Seiten des Polygons gleiche Standpunkte an, so werden alle Seiten und Polygon Winkel, als z. B. EDC = GDH ist, sich ergeben.

§. 150.

Dreyzehnte Aufgabe. Den Diameter eines Cirkels zu messen (Fig. 55.).

Erster Fall, wenn man den Cirkel betreten kann. Man sezze in irgend einen Punkt seiner Peripherie, wo man will, einen Winkelmesser, richte die bewegliche Diopter auf 90°, damit bey F ein rechter Winkel entstehe. Man merke die Punkte G, H an, wo die scheinbaren

Radii an die Peripherie stossen. Die gerade Linie GH wird durch das Centrum gehen, da der Winkel GFH auf einem halben Cirkel steht. Mißt man daher einen von den spitzigen Winkeln und die dazwischen liegende Seite (FG oder FH), so wird der Diameter GH sich leicht ergeben, wenn man ihn selbst nicht etwa messen will.

Zweyter Fall, wenn der Cirkel von allen Seiten verschlossen ist, als wenn es z. B. ein Cirkelförmiger Thurm wäre, zu dem man doch aber von aussen kommen könnte.

Man wähle den Standpunkt in A und visire so nach B und C, daß die scheinbaren Visirlinien auf die Peripherie stossen. Man nehme darauf die Hälfte des Winkels BAC, und visire wiederum unter diesem halben Winkel so, daß die Visirlinie bey B anstosse. Man siehet deutlich, daß die verlängerte Linie AD durchs Centrum gehe. Man merke sich den Punkt D, und nachdem man die Weite AD gemessen hat, sage man: R : tang. BAD = AD : DL. Aus der Natur des Cirkels ergiebt es sich, daß, da DL und LB den Cirkel berühren, DL = LB sey. Deswegen wird LOD = $\frac{1}{2}$ BOA seyn. Es ist aber BOA das Complement des Winkels DAB, folglich LOD = $\frac{1}{2}$ Complement von BAD. Daher sage man: Wie Sinus $\frac{1}{2}$ Compl. BAD zu seinem Cosin., so DL zu DO, welches der gesuchte Radius des Cirkels seyn wird.

Dritter Fall, wenn man zu dem Cirkel nicht kommen kann. Man visire wiederum aus A nach B und C, so, daß AB und AC den Cirkel berühret, und nehme des halben Winkels BAC Complement DAE um den Winkel CAE = 90° zu erhalten. Man visire darauf durch die festen Dioptern nach C, daß AC der Tangens werde; durch die beweglichen nach E, und bezeichne durch fest eingestekte Stäbe die gerade Linie AE (§. 91.). Auf dieser Linie gehe man so weit von A (wo man unterdessen ein Zeichen hinsezt) ab, bis man von E aus A unter dem Winkel AED = $\frac{1}{2}$ BAC siehet, oder = dem Complemente vom Winkel DAE, so daß die scheinbaren Visirlinien die Peripherie in D zu berühren scheinen. Man messe AE, so wird man von dem rechtwinklichten Triangel EAD die gerade Linie AD haben. Hat man diese, so verfährt man übrigens, wie im vorhergehenden Falle.

§. 151.

Vierzehnte Aufgabe. Die Weite zweyer Oerter A und B (Fig. 57.) zu finden, die man aus den beyden Standpunkten C und D nicht zugleich sehen kann.

Auflösung. Man messe entweder durch die erste oder zweyte Aufgabe die Weite AC und den Winkel ACD, wenn man annimt, daß B von C aus nicht gesehen werden kann. Eben so messe man BD und gleichfals den Winkel CDB. Man messe endlich die Weite der Stand-

örter

örter C, D. In jedem der beyden Triangel ACD und BCD wird man nun den Winkel C und D nebst den Seiten, die sie einschliessen, haben, und AD, CDA; ingleichen CB und BCD finden. Folglich werden in dem Triangel CED drey Winkel und die Seite CD gegeben werden, und CE, ingleichen DE können gefunden werden. Zieht man diese von den bekannten Seiten BC und AD ab, so bleibt EB und EA mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel AEB (=CED) übrig. Dadurch löst man den Triangel AEB auf und erhält AB.

§. 152.

Funfzehnte Aufgabe. Ein Polygon auf dem Felde abzustekken.

Auflösung. Will man ein Polygon abstekken, so müssen alle Grössen entweder durch den verjüngten Maaßstab oder durch die Berechnung bekannt seyn. Man kann das Abstekken aber aus dem Centro C (Fig. 56.) vornehmen, indem man die Winkel DCB, DCE, ECF u. f. durch den Winkelmesser erhält, und durch gerade Linien, die die Radios des Polygons vorstellen, vermittelst der Meßstäbe bemerkt; darauf mißt man sie wirklich und bestimmt die Längen CB, CD, CE u. f. Kann man nicht in die Mitte der Fläche eines Polygons kommen, so kann man die Seiten messen und die Polygonwinkel aufnehmen, oder sie auch durch Diagonallinien bestimmen, je nachdem

es nach der Beschaffenheit des Orts bequemer zu seyn scheinet.

Man kann die Winkel auch selbst auf die Erde entweder vermittelst eines langen aus Stäben verfertigten Cirkels auftragen, oder wenn dieser nicht bey der Hand ist, durch einen Pfal AB (Fig. 58.), den man in die Erde schlägt, und woran man ein Seil CH befestiget, welches von H aus sich in zwey Theile HF und HG theilen läßt, und an einem andern Pfahle DE befestigt wird, dessen Ende E zugespitzt ist. Führt man den Pfahl DE, indem man mit der Hand so zwischen G und F faßt, daß die Seiten HF und HG des Seiles das Ein- und Ausweichen des Stabes verhindern, herum, so wird ein Bogen EI beschrieben werden können. Hat man einen gehörig langen Stab MI, der in halbe Zolle (oder in noch kleinere Theile) eingetheilt ist, bey sich, und man weiß, wie viel solcher Theile der Radius EB habe, so wird durch Hülfe der Sinustafeln die Sehne des Bogens IE bestimmt werden, daß folglich der Winkel IBE seine gehörige Zahl Grade erhält. Wer aber die Geometrie inne hat, dem werden dergleichen Hülfsmittel, wenn sie die Beschaffenheit der Arbeit und der Ort nothwendig macht, sich von selbst darbieten. Ich füge daher nichts von den besondern Instrumenten, die von einigen ganz sinnreich ausgedacht worden sind, hinzu, von denen man zwar keinen allgemeinen Gebrauch machen kann, die aber bey gewissen

Neben-

Nebenumständen die Arbeit nicht wenig verkürzen. Auch von den Messungen der Höhen durch den Schatten, oder der Weiten durch blosse eingestochene Stäbe, die man, wenn andere Instrumente fehlen, sehr füglich zur Beschreibung ähnlicher Triangel gebrauchen kann, will ich nichts sagen. Denn es würde eine unendliche Arbeit seyn, diese Kunstgriffe der Meßkünstler durchzugehen, diejenigen, die der Theorie nicht unkundig sind, begreifen sie leicht, wenn sie sie nur einmahl sehen; ja ein jeder, der in der Geometrie bekannt ist, wird sie sich oft besser ausdenken.

Vierter Abschnitt.

Von der Reduktion der Winkel zum Centro, und der Triangel auf die Horizontalfläche.

§. 153.

Oft trägt es sich zu, vornehmlich wenn man grosse Triangel erhält, daß man statt des Zeichens, wohin man visiren soll, ein Objekt bekömmt, auf dessen Stelle man das zum Messen der Winkel bestimmte Instrument nicht sezzen kann. Als wenn z. B. jemand die Winkel A und B (Fig. 60.) aufnehmen sollte, und B wäre ein Thurm, in A aber stünde ein Baum. Hat man den Winkel BAC, und soll ABC finden, so wird man das Instrument nicht

in

in B, sondern nahe bey B, als z. B. in b aufstellen müssen, so daß man also den Winkel AbC statt ABC nehmen muß. Es geschieht nicht selten, daß man auf diese Art das Instrument ausserhalb aller drey Winkel eines Triangels sezzen muß. Man sezt aber dabey voraus, daß entweder durch die Auflösung eines andern Triangels, oder sonst woher eine von den Seiten AB oder AC bekannt sey, und die übrigen gesucht werden. Man sieht offenbahr, daß, wenn man nicht aus dem genommenen Winkel AbC den Winkel ABC findet, den man nehmen sollte, man die Seiten nicht richtig werde finden können. Die Auflösung dieser Aufgabe aber, nemlich aus einem erhaltenen Winkel (dessen Spitze von der Spitze des Winkels, der aufzunehmen war, in Rüksicht auf die Grösse der Seiten als sehr wenig abweichend angenommen wird) den wahren Winkel zu finden, heißt die Reduktion des Winkels zum Centro, weil nemlich das Centrum des Instruments nicht in die Spitze des erhaltenen, sondern zu suchenden Winkels hätte gesezt werden müssen. Um daher die Auflösung dieser Aufgabe richtig verstehen zu können, schikken wir noch folgenden Lehnsatz voraus.

§. 154.

Lehnsatz. Wenn der Winkel ACB (Fig. 59.) sehr klein ist, so kann man Erstlich statt des Bogens, der

diesen

diesen Winkel mißt, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, das Perpendikel BA, das aus B auf AC oder aus A auf BC gefället ist, dafür annehmen. Zweytens, wenn AD oder BE in Rükſicht auf AC oder BC sehr klein ist, so unterscheidet sich das Perpendikel AB von dem Perpendikel DE nicht merklich.

Beweis. Der erste Theil unsrer Behauptung leuchtet deutlich aus den Sinustafeln selbst hervor. Denn wenn man annimt: wie der auf Minuten und Sekunden reducirte Radius (dessen Logarithme = 5,3144251) sich zum Bogen von 30′ oder 1800″ verhält, so verhält sich der Sinus totus zum Sinus des Winkels von 30′. Der Logarithme, den man zum vierten Gliede der Proportion erhält, nemlich 7,9408474 weicht nur bloß in den leztern beyden Zahlen von den Logarithmen in den Tafeln vom Sinus des Winkels von 30′ oder 7,9408419 ab. Wenn aber die Abweichung zwischen einem Bogen von 30′ oder $\frac{1}{2}^{\circ}$ und seinem Sinus so klein ist, so wird sie bey kleinern Winkeln noch viel kleiner seyn.

Der andere Theil unserer Behauptung ergiebt sich aus der Geometrie. Denn man nehme an, DF sey mit CB parallel, so ist AF : FD (oder BE) = DE : EC, oder AF : DE (oder FB) = EB : EC. Man nimt nun an, BE sey in Rükſicht auf EC ein kleiner Theil, folglich wird auch AF in Rükſicht auf FB ein kleiner Theil, und

daher

daher noch kleiner in Rükſicht auf EC oder BC ſeyn, da $\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{EB}$. Z. B. Wäre AB = 6″, EB = 1′, und CB = 500′, ſo findet man AF kleiner als 0,15‴.

§. 155.

Erſte Aufgabe. Die Winkel des Triangels ABC, welche man in a, b, c aufgenommen hat, auf ihre Centra zu reduciren.

Auflöſung. Man berechne erſtlich den Triangel ABC nach den erhaltenen Winkeln und der bekannten Seite, als etwa AC. Hat man die Seiten AB und BC gefunden, ſo mache man bey dieſer Vorausſetzung die Gleichung, die Seite AB verhält ſich zum Perpendikel ad (welches man von dem Standpunkte a, wo man den Winkel BaC nahm, auf die wahre Seite AB des Triangels hat fallen laſſen, und nach Zollen oder auch wohl Füſſen gemeſſen iſt), wie der auf Grade reducirte Radius zu dem Bogen, der den Winkel aBA mißt. Dieſer Winkel zum aufgenommenen BaC addirt, giebt den auswendigen BgC. Es muß ſich eben ſo die gefundene Seite AC zum Perpendikel ae, das aus dem Standpunkte a, (wo ſich das Centrum des Inſtruments befand) auf die wirkliche Seite CA gelaſſen iſt, wie der Radius, der auf Grade reducirt iſt, zu dem Bogen, der den Winkel aCA mißt, verhalten. Weil der äuſerliche (ſchon gefundene)

Winkel

Winkel BgC = BAC + aCA, so ziehe man von dem äusserlichen BgC den eben gefundenen aCA ab, so wird man den auf das Centrum A reducirten Winkel haben.

Aus dem Lehnsatze siehet man leicht, daß es einerley sey, man nehme da oder Af. Je nachdem es also in Rükſicht auf die Lage des Orts bequemer ist, kann man entweder aus dem wahren Standpunkte A auf die gerade Linie aB ein Perpendikel fallen lassen und es messen, oder aus dem angenommenen Standpunkte a auf die wahre Seite.

Der Anfänger merke aber hier, daß dieses Herablassen des Perpendikels nicht eben so ängstlich darf vorgenommen werden, sondern entweder mit einem hölzernen Sonnenzeiger oder auch mit einem grössern: man kann es sogar auch nur nach dem Augenmaasse thun, wenn man hierinn einige Uebung gehabt hat. Um aber eine Linie als AB zu erhalten, worauf das Perpendikel fallen kann, so ists genug, wenn man, indem man das Auge zwischen A und B bringt, ein Seil so ausspannen läßt, daß es sich auf der geraden Linie AB zu befinden scheinet. Sollte man auch um ein oder zwey Zolle fehlen, so wird, wenn die Seite AB ziemlich groß ist, der scheinbare Fehler den Winkel nicht unrichtig machen, man hat daher Ursach, bey dem Aufnehmen solcher Perpendikel desto sorgfältiger zu seyn, je kleiner die Weite AB ist.

§. 156.

§. 156.

Laßt uns diese Reduktion der Winkel zum Centro durch ein Beyspiel deutlicher machen. Es sey die Seite AC = 583′ gefunden, auf welche Art man wolle. Der erhaltene Winkel BaC = 42° 18′, AbC = 63° 50′, BcA = 73° 52′. Man suche wie gewönlich die Logarithme der Seiten AB, BC, welche zur Reduktion des bey a erhaltenen Winkels hinreichend sind, aus den Gleichungen sin. B : sin. A = AC : BC, ingleichen sin B : sin. C = AC : AB.

Log. sin. A = 9,8280231
Log. AC = 2,7656686

Summe ist = 12,5936917
Log. sin. B = 9,9530418

Log. BC = 2,6406499.

Ferner Log. sin. C = 9,9825506
Log. AC = 2,7656686

Summe ist = 12,7482192
Log. sin. B = 9,9530418

Log. AB = 2,7951774.

Wir wollen annehmen, das Perpendikel ad sey = 0,5′, ae = 0,7′, so kann man ihre Logarithmen sehr füglich halbpositiv annehmen (wie ich in der Algebra gesagt habe), nemlich

nemlich für ad — 1,6989700, für ae aber — 1,8450980. Man wird folgende zwey Gleichungen haben: die Seite AB (diz man gefunden hat): ad = der Radius (der auf Grade reducirt ist): dem Bogen, der den Winkel aBA mißt; hiernächst, die Seite AC: ae = der reduc. Rad. : Bogen ae.

Log. ad = — 1,6989700
Log. des reducirten Radii = 5,3144251
Summe = 5,0133951
Log. AB = 2,7951774

Log. des Bogens ad = 2,2182177. Dieser Logarithme wird unter denen, die zu den natürlichen Zahlen gehören, die Zahl der Sekunden, die dem Bogen ad zukommen, der den Winkel aBA mißt, angeben. Sie werden 165″,3 = 2′45″,3 auf das nächste beykommen.

Log. ae = — 1,8450980
Log. des reduc. Radii = 5,3144251
die Summe ist = 5,1595231
Log. AC = 2,7656686

Log. des Bogens ae = 2,3938545, ihm kommen 247″,6 = 4′7″,6 am nächsten.

Weil (nach §. 155.) der Winkel aBA zum erhaltenen hinzugesezt, und aCA davon weggenommen werden muß, so ists genug, wenn man ihre Differenz (da der leztere gröſſer als der erstere ist) vom erhaltenen Winkel abzieht.

Der erhaltene Winkel bey a ist = 42° 18′ 0″
Die Differenz von aBA und aCA = 0 1 22,3

folglich der zum Centro A reduc. Winkel = 42° 16′ 37″,7,
od. wenn man eine runde Zahl annehm. will, 42° 16′ 38″.

§. 157.

Durch eben dieses Verfahren wird der erhaltene Winkel AbC zum Centro B reducirt. Hier findet sich nur der Unterschied, daß beyde Winkel bAB und bCB von dem erhaltenen weggenommen werden müssen, welches sich schon von selbst wird einsehen lassen, wenn man die gerade Linie kB durch b und B ziehen wird. Befände sich b über B, daß die Linien bA und bC ausserhalb BA und BC fielen, so würde man beyde zu dem erhaltenen hinzu addiren müssen. Bey der Reduktion des Winkels AcB wird wiederum der Winkel CAc zum erhaltenen hinzu addirt, und CBc von der Summe hinweggenommen, oder vielmehr die Differenz der beyden Verbesserungswinkel wird zum erhaltenen hinzugethan, oder davon hinweggenommen, je nachdem der erstere oder leztere grösser gewesen ist. Nimt man bh = 0,3″, bi = 0,4″ an, so erhält man die Summe der Winkel bAB + bCB = 4′27″,87, oder 4′28″; zieht man sie von dem bey b erhaltenen Winkel ab, so lassen sie den zum Centro B reducirten Winkel = 63° 45′ 32″ übrig. Wären auf gleiche Art die Perpendikel cl = 0, 45″, en = 0,8″, so würde cAC = 159″,2

und

und cBC = 377″,4. Die Differenz wäre 218″,2 = 3′38″, und von 73°52′ abgezogen, hätte man den auf C reducirten Winkel = 73°48′22″.

§. 158.

Der Leser merke hierbey an, daß man bey Exempeln nicht eigentlich etwas Wahres herauszubringen, sondern nur die Anwendung der Methode zu zeigen habe. Wir nahmen vorher drey Winkel A, B, C an, die so aufgenommen waren, daß ihre Summe genau 180° war. Die Perpendikel ad, ae, bh, bi, lc und cn sind ohne Wahl angenommen, daß alle Verbesserungen durch Subtraktion ausgerichtet worden sind. Daher ist es nun gekommen, daß bey der Summe der reducirten Winkel an 180° fast 9′ 28″ fehlen. Dies hätte sich aber bey einem richtigen Exempel nicht ereignen können. Man merke indessen, daß, wenn man alle drey Winkel aufnimt, es nur von ohngefehr sich zutragen kann, daß ihre Summe gerade 180° ausmacht, gesezt, man bediente sich auch dabey der besten Instrumente. Denn wer wird bey einem Winkel für einen Fehler von 3 oder 4 ja 5 Sekunden Bürge seyn können, wenn auch das Instrument mit einem Tubus und Mikrometer versehen wäre, und sein Radius drey Fuß hätte? da dergleichen Fehler schon durch die Dikke des Fadens im Mikrometer veranlaßt werden können. Findet man also bey der Summe der Win-

kel 12, 15 oder 20 Sekunden mehr oder weniger als 180°, so pflegt man sie auf gleiche Art unter die Winkel zu vertheilen, um die Summe 180° herzustellen. Ist dies geschehen, so fängt man die Rechnung an. Hätte aber ein Winkel nicht recht genau gemessen werden können, so pflegt man ihm den größten Theil des Fehlers zuzugeben. Diese Abweichung von 180° fällt fast stets bey der Summe der aufgenommenen Winkel vor, und sie muß sich auch bey der **Reduktion auf das Centrum** ereignen. Wir wollen, um bey unserm fingirten Falle stehen zu bleiben, annehmen, es fehlten, nach geschehener Reduktion, bey der Summe der Winkel 9′28″ an 180°, so theile man diesen Fehler in drey Theile, und man addire noch zu jedem reducirten Winkel 3′ 9″; zu dem Winkel aber, wo die Perpendikel am größten waren (wo also am leichtesten ein Fehler begangen werden konnte), ausserdem noch 1 Sekunde, welche sonst an der gehörigen Summe fehlen würde, so wird der Winkel bey A = 42°19′47″, bey B = 63°48′41″, bey C = 73°51′32″ seyn.

§. 159.

Sind die Winkel mit einem Instrumente aufgenommen, welches einen Fehler hat, den der Beobachter kennt, so muß man sie auf die Art verbessern, die wir im 107. u. f. §§. angezeigt haben, ehe man die Seiten zur vorzunehmenden Reduktion der Winkel zum Centro sucht. Die

Ver=

Verbesserung in Rükſicht auf die gehörige Summe (von 180°) iſt nicht nothwendig; dieſe nimt man nur, wenn die Winkel ſchon aufs Centrum reducirt ſind, an denſelben vor, und alsdann muß man endlich nach den auf dieſe Art verbeſſerten Winkeln die für die Seiten nöthige Berechnung von neuem wiederholen. Bey Meſſungen, die mit kleinen Inſtrumenten vorgenommen werden, iſt freylich eine ſolche Genauigkeit nicht allein unnöthig, ſondern faſt lächerlich, aber es wird es gewis niemand für überflüßig halten, wenn Anfänger, die ſich zur Praxis vorbereiten, dieſes auch auf kleinere Inſtrumente anwenden, und die Methoden, die bey akkuratern Meſſungen nothwendig ſind, ſich bekannt machen, um ſich derſelben, wenn es die Sache erfodert, auf die gehörige Art bedienen zu können, ſo daß ſie das nicht erſt aus einem Buche mühſam zu lernen brauchen, was ſie hier ohne groſſe Mühe der Uebung wegen lernen können. Sollten auch kleinere Inſtrumente ſehr grobe Fehler veranlaſſen können, müſſen wir ſie deswegen überſehen, da wir ſie verbeſſern können, zumahl wenn es uns um eine etwas wichtige Sache zu thun iſt, und wir gröſſere Inſtrumente nicht erhalten können?

§. 160.

Damit die Anfänger ferner lernen mögen, wie weit ihre Sorgfalt in dergleichen Nebenumſtänden ſich erſtrekken müſſe, und mit welcher Sorgfalt und Genauigkeit die

zur Reduktion nöthigen Perpendikel gemessen werden müssen, so mögen sie aus den berechneten Seiten (wie wir §. 156. gethan haben) suchen, wie groß der Fehler sey, den man bey ihrer Messung begehen könne. Wir haben z. B. den Logarithmen der Seite AB = 2,7951774 gefunden, ihm kommen (wenn man den Bruch nicht achtet) 624′ zu. Bey dem Winkel aBA soll man über $\frac{1}{2}$ Minute nicht fehlen; es frägt sich, wie groß wird der Fehler bey dem Perpendikel ad seyn? Man nehme an, wie sich der auf Grade reducirte Radius zu 30″ verhält, so verhält sich AB zu dem vierten Terminus.

Log. 30″ =	1,4771212
Log. AB =	2,7951774
die Summe ist =	4,2722986
Log. des Radius =	5,3144251

Differenz = — 2,9578735, diesem gehört an 0,09076. Man sieht hieraus, daß wenn der Fehler im Perpendikel 0,09 Fuß ist, das ist 12‴,96, oder 13‴, der Fehler im Winkel schon 30″ betrage. Wenn wir also statt des Perpendikels ad (Fig. 61.), welches wir = 16″ annehmen, ae = 17″1‴ sezzen, so wird der Winkel um $\frac{1}{2}$ Minute grösser. Wenn aber statt ad, ae erhalten werden soll, so muß der Winkel aed fast 69°30′ seyn, folglich müßte man von dem rechten Winkel bey d

über

über 20° abgehen, welches gewiß schon durch das Augenmaaß leicht vermieden wird.

§. 161.

Zweyte Aufgabe. Die Triangel DAE, EAC, CAB u. s. (Fig. 62.) auf den Horizont zu reduciren, wobey man die Linie AB zur Grundlinie angenommen hat, unter der Voraussetzung, daß die Seiten der Triangel nicht sehr groß sind.

Auflösung. Wenn man auf den Standpunkten die Winkel aufnimt, indem man nach dem ausgesetzten Zeichen hin visirt, und das Instrument in eine vertikale Lage vermittelst des Bleywurfs oder einer genauen Wasserwage gebracht ist, so nehme man auch überall die Winkel der Höhe der Standpunkte, wohin man visirt, besonders auf. So nehme man in A den Winkel CAF (man nimt nemlich AF für eine horizontale Linie an), ferner EAG, DAH; in B aber CBF; in E, CEN, wenn der Standpunkt C höher ist als E; ingleichen DEM auf. Oder, wäre ein Standpunkt höher, so hätte man die Winkel der Senkung zu messen. Wollte man aus D nach E visiren, so wäre DK die horizontale Linie, der Winkel der Senkung würde KDE seyn, welcher bey nicht sehr grossen Entfernungen dem Winkel der Höhe DEM gleich ist. Eben so ist der Winkel der Senkung IDA dem Winkel der Höhe DAH gleich, u. s. f. wie leicht einzusehen ist. Hat man so wohl auf den schie-

fen Flächen alle Winkel, als auch die Winkel der Höhen und Senkungen auf gehörige Art aufgenommen, auch die erstern durch die vorige Aufgabe auf das Centrum reduciert, ingleichen die Verbesserung des Instruments, wenn es nöthig ist, dabey besorgt, so hat man die Seiten AC und CB (AB nimt man für die Grundlinie auf der horizontalen Fläche an, worauf man die übrigen Seiten reduciren muß) ingleichen AE, AD und DE u. f. zu suchen. Darauf nimt man zur Reduktion des Triangels ACB die Gleichung an: wie R : cos. CBF so CB : BF, ingleichen R : cos. CAF = AC : AF. Man wird nun die Seiten BF und AF nach dem Horizont der Grundlinie erhalten, und da sie auch bekannt ist, die Winkel, wenn es nöthig ist, nach §. 89. finden.

§. 162.

Weiter hat man EN = GF zu suchen, und zwar nach der Gleichung, R : cos. CEN = EC : EN; ingleichen wird man GA finden, wenn man sagt, R : cos. EAG = AE : AG. Man wird wiederum in dem Triangel AGF drey Seiten haben, von denen die Winkel sich auch ergeben werden.

Eben so findet man durch die Gleichungen R : cos. DAH = DA : AH; R : cos. DEM = DE : EM oder GH, die Seiten HG und HA auf der horizontalen Grund=

Grundfläche, und aus den drey Seiten des Triangels HGA werden auch die Winkel gefunden werden.

§. 163.

Ein Beyspiel. Es sey AB = 593'. Die zum Centro reducirten Winkel als CAB = 64°15'; ABC = 88°25'; ACB = 27°20'.

Die Gleichung ist, sin. C : sin. A = AB : BC.

Log. sin. A = 9,9545184
Log. AB = 2,7730547

die Summe = 12,7275731
Log. sin. C = 9,6619701

Log. BC = 3,0656030

Die Gleichung ist ferner, sin. C : sin. B = AB : AC.

Log. sin. B = 9,9998342
Log. AB = 2,7730547

die Summe ist = 12,7728889
Log. sin. C = 9,6619701

Log. AC = 3,1109188

Ausserdem sey der Winkel der Höhe CBF = 3°11'; CAF = 2°52'. Die Gleichung ist nun;

R : cos. CBF = BC : BF.

Log. cos. CBF = 9,9993293

Log. BC = 3,0656030

Log. BF = 3,0649323, dem 1161,2 zukommt.

Ferner die Gleichung, R : cos. CAF = AC : AF.

Log. cos. CAF = 9,9994562

Log. AC = 3,1109188

Log. AF = 3,1103750, dem 1289,3 zugehört.

Zur Findung der Winkel dient die Gleichung,

AF : AB + BF = BF — AB : Differenz der Abschnitte.

Log. AB + BF = 3,2440786

Log. BF — BA = 2,7545012

die Summe ist = 5,9985798

Log. AF = 3,1103750

Log. der Differenz der Abschnitt. = 2,8882048, wozu 773,1 fast gehöret.

Man findet daher den grössern Abschnitt OF = 1031,2; den kleinern AO = 258,1.

Ferner

Ferner die Gleichung AB : AO = R : sin. ABO.

Log. AO = 2,4117880
Log. R + Log. AO = 12,4117880
Log. AB = 2,7730547

Log. sin. ABO = 9,6387333, dem 25°48′3″ zugehören.

Ferner die Gleichung, BF : OF = R : sin. OBF.

Log. R + Log. OF = 13,0133029
Log. BF = 3,0649323

Log. sin. OBF = 9,9483706, dem 62°36′44″ am nächsten kommen.

Hieraus erhält man endlich den Winkel ABF = 88° 24′47″; FAB = 64°11′57″; AFB = 27°23′16″.

§. 164.

Was wir bey dem Triangel ACB gethan haben, müssen wir auch bey den übrigen thun. Da wir an diesem einem die Methode deutlich genug wahrnehmen können, so wollen wir die Rechnung nicht weiter fortsetzen. Das muß indessen der Anfänger bemerken, daß man die Winkel, die wir jetzt so mühsam gesucht haben, durch die sphärische Trigonometrie auf eine viel kürzere Art erhalten kann. Jetzt wollten wir indessen doch zeigen, wie man

eben

eben diese Absicht auch durch die ebene Trigonometrie erreichen könne. Es paßt aber diese Methode, wie selbst die Einschränkung in der Aufgabe sagte, nur auf den Fall, wenn die Seiten der Triangel nicht sehr groß sind. Aus dem, was ich ferner sagen werde, wird man sehen, was für eine Seite man als eine solche anzusehen habe, die anderer Verbesserungen bedürfe.

§. 165.

Erster Lehrsatz. Wenn man bey sehr entfernten Standpunkten die Winkel der Höhen und Senkungen mißt, so muß man sie um den halben Winkel verbessern, den die Vertikallinien zum Centro der Erde machen.

Beweis. Es sey C (Fig. 63.) das Centrum der Erde. Die Standpunkte B und A. Durch A und B seyn vertikale Linien gezogen, als AC und HBC, welche auf dem Horizonte perpendikulair stehen und beym Centro C zusammenstossen. Wenn LB auf der Vertikallinie perpendikulair stehet, und LBC = 90°, so giebt der Winkel ABL, wenn man aus B nach A visirt, die scheinbare Differenz der Höhen BF und AE. Nimt man nun an, daß mit dem Radius CB der Bogen DB beschrieben werde, so ists sehr augenscheinlich, daß DE = BF sey, und die wahre Differenz der Höhen durch den Winkel ABD erhalten werde. Da aber LBC = 90°, und LB den

Bogen

Bogen in B berührt, und der vom Tangens BL und der Sehne BD umfaßte Winkel nach der Geometrie $\frac{1}{2}$ DCB $= \frac{1}{2}$ECF ist, so muß daher der Winkel der scheinbaren Höhe ABL um den Winkel LBD oder $\frac{1}{2}$DCB vermehrt werden. W. D. E. W.

Wenn HAC $= 90°$, so ist HAB der Winkel der scheinbaren Senkung des Standpunkts B unter A; beschreibet man aber mit dem Radius AC den Bogen AG, so erscheint die wahre Senkung unter dem Winkel GAB: man muß daher HAG abziehen, welches, da AH der Tangens ist, $= \frac{1}{2}$ACG $= \frac{1}{2}$ECF ist. Man muß daher die scheinbare Senkung um $\frac{1}{2}$ECF verringern, wenn sie verbessert werden soll. W. D. A. W.

§. 166.

Erster Zusatz. Die scheinbaren Winkel der Höhen sind kleiner als ihre wirklichen Winkel; die scheinbaren Winkel der Senkungen aber sind grösser als ihre wirklichen Winkel.

§. 167.

Zweyter Zusatz. Wenn die Höhe EA kleiner als EL und grösser als ED wäre, so würde der Ort A, wenn man aus B hinsähe, unter dem Horizont BL gelegen zu seyn scheinen. Daher kann es kommen, daß eine grössere Höhe einen Senkungswinkel bekommt. In einem solchen

Falle

Falle muß man den scheinbaren Senkungswinkel von $\frac{1}{2}$ ECF abziehen, die Differenz wird der wahre Winkel der Höhe seyn.

§. 168.

Dritter Zusatz. Gleiche Höhen haben gleiche scheinbare Senkungen. Denn wären A und G die Standpunkte, so wäre die Senkung eines jeden $HAG = \frac{1}{2}ECF$, und eben hierdurch würde nach der aus dem Lehrsatze genommenen Verbesserung ihre Gleichheit sich zeigen, da die Differenz $= o$ würde.

§. 169.

Vierter Zusatz. Die grössere Höhe EA (Fig. 65.) muß eine kleinere Senkung als die kleinere Höhe FB haben. Denn wenn die Winkel HAG und LBD einander gleich sind, und man EA für grösser als FB annimt; so wird A zwischen L und D seyn und LBA kleiner als LBD, folglich kleiner als HAG. Aber da AE grösser als FB ist, so ist FG grösser als FB, und G zwischen H und B, folglich HAG kleiner als HAB, und daher LBA noch viel kleiner als HAB. Und hieraus siehet man, welcher Standpunkt höher sey, um die Differenz der Höhen ordentlich bestimmen zu können.

§. 170.

Anmerkung. Mit Recht werden Anfänger hier die Frage aufwerfen, wie groß wohl die Weite der Standpunkte

punkte seyn müsse, um die eben gezeigte Verbesserung anzubringen? Hiernächst, wie jener halbe Winkel ECF, welcher dem Lehrsatze zu Folge die Verbesserung ausmacht, gefunden werden könne? Beyde Bedenken sollen durch die Auflösung des zweyten gehoben werden. Obgleich dieser Winkel beym Mittelpunkt der Erde in verschiedenen Gegenden, auch bey gleich weit von einander entfernt angenommenen Standpunkten, wegen der von der Form einer Kugel ziemlich abweichenden Form der Erde, verschieden ist, so ist doch dieser Unterschied so klein, daß man ihn, ohne einen Fehler zu begehen, übersehen kann. Wir wollen also das Verhältniß des Diameters vom Aequator zur Erdaxe nach dem Newton wie 231:230 annehmen. Aus diesem Verhältnisse findet man (die Art, wie dies geschieht, kann hier nicht gezeigt werden) den Radius des Aequators = 3280108, die halbe Axe = 3265909 pariſische Klafter (sechsfüßige Ruthen). Sucht man dazwischen die mittlere Proportionalzahl, und reducirt sie auf wienerische Fuß (es verhält sich der pariser Fuß zum wiener wie 102764 : 100000, davon die Logarithmen 5,0118410, und 5,0000000 sind), so wird man den Radius der Erdkugel in wiener Füssen erhalten, und der Logarithme davon wird 7,3049382 seyn. Hat man diesen Logarithmen, so findet man durch eine leichte Proportion die Logarithmen und Zahl der Füsse, die ich hiehersetze, da man sie oft brauchen kann.

Die

Die Logarithmen des Verhältnisses vom wiener Fusse zum pariſiſchen ſind 5,0000000 : 5,0118410.

Der Logarithme der Zahl der wieneriſchen Klafter vom Radius der Erdkugel iſt 6,5267870, welchem 3363556 Klafter zugehören.

Der Logarithme der Zahl der wieneriſchen Füſſe des Radius der Erdkugel iſt 7,3049382, welchem 20181336 Fuß zugehören.

Der Logarithme der Zahl wieneriſcher Füſſe von 1° der Erdkugel iſt 5,5468156, dem 352221 Fuß zugehören.

Der Logarithme der Zahl wieneriſcher Füſſe von 1′ der Erdkugel iſt 3,7686644, dem 5870,35 Fuß zugehören.

Der Logarithme der Zahl wieneriſcher Füſſe von 1″ der Erdkugel iſt 1,9905132, dem 97,84 Fuß zugehören.

§. 171.

Hieraus werden Anfänger ſchon abnehmen können, wie groß die Entfernung der Standpunkte ohngefehr ſeyn müſſe, wenn die Verbeſſerung, von der wir vorher redeten, nöthig ſeyn ſoll. Hätte man einen Fall von Zehntheilen einer Sekunde, ſo würde man ſie immer vornehmen können; hätte man Minuten, ſo würde ein Raum von 11740 Fuß da ſeyn müſſen. Wenn man bey gröſſern Meſſungen genaue Inſtrumente gebraucht, ſo darf man Sekunden nicht übergehen, und wenn die Diſtanz nur

195,68′ gewesen wäre, so wird die Senkung oder Erhebung der Standpunkte schon um 1″ verändert werden; wiewohl in diesem Falle gewönlich andere Ursachen da sind, weswegen man bey kleinen Entfernungen auf diese Verbesserung nicht Rükksicht nimt, als die z. B. ist, weil man die Differenz der Senkungen oder Höhen auch mit den besten Instrumenten nicht so genau nehmen kann, daß man nicht um den fünften oder sechsten Theil des Bogens der Distanz fehlen sollte. Ist übrigens die Senkung und Erhebung der Standörter mit Genauigkeit aufgenommen, so kann man den Winkel bey C in Minuten und Sekunden finden, wenn man zugleich die Seite AB berechnet hat. Denn da HAC ein rechter Winkel ist, so erhält man BAC, wenn HAB gegeben ist, weil es um den Winkel ABL von BLC unterschieden ist. Addirt man daher den Winkel der Erhebung, so erhält man CLB, dessen Complement der Winkel bey C ist (Fig. 63.). Befindet sich in beyden Standpunkten eine Senkung (Fig. 65.), so erhält man BAC, wenn man HAB von 90° abzieht. Zieht man davon (von 90°) die andere Senkung ABL ab, so erhält man CLB, dessen Complement ECF ist. Hat man in dem Triangel ABC die Seite AB, so werden drey Winkel und eine Seite gegeben, folglich kann BC und AC gefunden werden, und, wenn der Radius CE gegeben ist, AE und BF selbst.

§. 172.

Zweyter Lehrsatz. Die Bogen, die man auf der Erdfläche gemessen hat, muß man auf den Horizont des Meers reduciren, damit man ihre verhältnißmäßige Grösse erhalte.

Beweis. Weil Messungen, die man an verschiedenen Orten angestellt hat, von dem Centro der Erdkugel, wegen der Unebenheit ihrer Oberfläche, nicht gleich weit entfernt sind, so können die Bogen, ob sie gleich eine gleiche Anzahl von Graden, Minuten und Sekunden enthalten, oder, was eben so viel ist, einander gleich sind, doch eine verschiedene Grösse haben. Hätte z. B. jemand eine Messung von einem ansehnlichen Erdkreise in der Höhe BF über dem Meere EF (Fig. 63.) angestellt, und hätte nun alle Triangel auf die erhaltene Grundfläche in der Höhe BF reducirt, und die Zahl der Füsse des Bogens BD gefunden; ein anderer hätte aber seine Triangel selbst auf die Oberfläche des Meers EF reducirt, so sieht man leicht ein, daß der Bogen BD mit EF nicht verglichen werden kann, wenn man nicht den erstern auf eben diesen Horizont reducirt. Man muß eben deswegen, wenn die Weite BF ein merkliches Verhältniß zum Radius der Erde hat, diese Reduktion vornehmen. W. Z. E. W.

§. 173.

Erster Zusatz. Vor allen Dingen muß man daher wegen der Höhe BF in Gewißheit seyn.

§. 174.

§. 174.

Anmerkung. Dieser Unterschied der Höhen wird sehr füglich aus Wahrnehmungen, die man lange Zeit hindurch in der Gegend des Ortes B mit dem Barometer angestellet hat, gefunden. Denn aus denselben wird die mittlere Höhe des Quekfilbers, das im Barometer über dem in dem Gefässe stehenden Quekfilber steht, gefunden, oder die Höhe des Zeichens, bey welchem man auf der Scala des Barometers **abwechselnd** (varia) zu schreiben pflegt. Da auch verschiedene schon diese für den Horizont des Meers bemerkt haben, und man sehr genau weiß, wie verschieden die Höhe des Quekfilbers nach gewissen abgemessenen Höhen, von der Oberfläche des Meers angerechnet sey, so wird man leicht durch Vergleichung der mittleren Höhen von der Höhe des Ortes B über der Horizontalfläche des Meeres so viel bestimmen können, als zu dieser Reduktion erfodert wird; denn der Unterschied weniger Klafter hat auf die Reduktion keinen merklichen Einfluß. Es giebt so gar welche, die die Differenz der Höhen von den Standpunkten A und B durch die bemerkten Höhen des Quekfilbers in einem auf dieselben gebrachten Barometer messen, wiewohl ich glaube, daß dies Verfahren nicht sehr sicher ist, weil oft in der Zeit, da man von einem Standpunkte nach dem andern geht, die Luft mancherley Veränderungen leiden kann, welche, da sie, zumahl in unserm Clima, einen nicht geringen Einfluß auf

das Quekſilber haben, die Vergleichung der Höhen gegen einander ſehr ungewiß machen müſſen.

§. 175.

Zweyter Zuſatz. Weil die Bogen EF und BD einander ähnlich ſind, ſo wird CF : FE = CB : BD, und CF : BF = EF : DB — EF. Da der Winkel FCE gegeben iſt, ſo ſind die erſten drey Sätze (§. 170.) bekannt, folglich giebt der vierte die von dem gemeſſenen Bogen abzuziehende Gröſſe, daß man ihn alſo auf den Horizont des Meeres reducirt erhält.

Exempel. Es ſey DCB = 20′, ſo wird EF = 117407 wiener Fuß ſeyn. Der Logarithme dieſer Zahl iſt = 5,0696944. Ferner ſoll BF = 600′ ſeyn, der Logarithme = 2,7781512, ſo findet man den Logarithmen DB — EF auf folgende Art,

Log. BF = 2,7781512
Log. EF = 5,0696944

Die Summe iſt = 7,8478456
Log. des Erdradius = 7,3049382

Log. DB — EF = 0,5429074, welchem 3,49′ zunächſt zukommen, oder faſt $3\frac{1}{2}$ Fuß, welche von der Zahl der Füſſe des gemeſſenen Bogens DB abgezogen werden müſſen, um den reducirten Bogen zu erhalten.

§. 176.

§. 176.

Man sieht schon, daß, wenn die Bogen nicht groß sind, und die Höhe BF nicht sehr ansehnlich ist, diese Reduktion weggelassen werden könne, indem andere Ursachen da sind, welche die Länge des gemessenen Bogens um eine viel beträchtlichere Grösse ungewiß machen, wohin unter andern die gehört, daß man wegen des Winkels bey C selbst nicht so ganz vollkommen gewiß ist. Wir wissen aber aus dem 170. §., daß ein Fehler von nur einer Sekunde bey diesem Winkel eine Länge von fast 100 Fuß irrig macht. Viel weniger hat noch diejenige Verbesserung auf sich, die wir jetzt beschreiben werden, welche wegen der Strahlenbrechung vorgenommen werden muß, es müßte denn seyn, daß die Seiten der Triangel sehr groß wären.

§. 177.

Dritter Lehrsatz. Die scheinbaren Winkel der Höhen und Senkungen werden durch die Brechungen der Lichtstrahlen in der Erdatmosphäre verfälscht.

Beweis. Aus sichern Bemerkungen weiß man, daß der Lichtstrahl, welcher nach A (Fig. 64.) unter der Richtung tAB kommt, in der Luft nicht nach der geraden Linie AB fortgeht, sondern sich in einen gewissen Bogen krümme (dessen natürliche Beschaffenheit ich hier nicht erklären mag), der ganz unter AB liegt, und welchen AB

in dem Punkte A berührt; daher kann ein in B stehender Beobachter wegen der in dieser Richtung aus A gehenden Lichtstrahlen das Objekt A nicht sehen, indem sie sich alle unter B beugen. Damit er also das Objekt A sehen möge, so ist es nothwendig, daß aus A andere Strahlen unter einer andern Richtung TAG kommen, welche unter einer gleichen Brechung sich in den Bogen AOB krümmen, der in A die Tangente TAG hat. Da wir nun die Objekte dahin versezzen, wohin die Richtung der Strahlen geht, die sie dann haben, wenn wir sie erblikken, so wird ein in B sich befindender Beobachter das Objekt A nach der Richtung der Strahlen sehen, die ihre Krümmung gegen B hat. Diese Richtung ist aber (§. 86. der Geometr.) die Lage der Tangente IB am Bogen AOB selbst, daher muß der Beobachter in B das Objekt nach BI sezzen, und daher wird ihm das Objekt um den Winkel IBA höher scheinen. Eben so kommen die aus B nach der Richtung BA ausgegangenen Lichtstrahlen nicht nach A, sondern andere, die in der Richtung BI gehen, und sich nach dem Bogen BOA krümmen. Daher glaubt ein Beobachter in A, das Objekt B in der Richtung der Tangente AG zu sehen, und die scheinbare Senkung HAB zeigt sich um den Winkel GAB kleiner. Man sieht hieraus, daß die Winkel der scheinbaren Höhen und Senkungen durch die Strahlenbrechung eine Veränderung leiden. W. Z. E. W.

§. 178.

§. 178.

Anmerkung. Die Krümmung dieses Bogens AOB ist gewiß nicht beträchtlich, und kann auf beyden Enden für gerade angesehen werden. D. Bouguer (wie auch D. de la Lande in s. Astronom. §. 1755. meldet) sezt den Winkel GAB fast $= \frac{1}{9}$ ACB. Ist daher der Bogen EF (§. 170.) nicht 880 Fuß gewesen, so reicht er nicht auf 1″. Diese Verbesserung wird durch andere Ursachen oft sehr ungewiß gemacht, weil in verschiedenen Gegenden und Jahreszeiten die Strahlenbrechungen sich nach keinem gewissen Gesezze richten, welches man aus der Vergleichung der Höhe des Barometers und Thermometers wohl machen könnte. Daher kommt es, daß auch bey weit grössern Entfernungen diese Strahlenbrechung von geübten Beobachtern übersehen wird, weil sie wegen der verschiedenen Beschaffenheit der Gegenden, der bald mehr bald weniger häufigen Dünste, sich nichts gewisses versprechen können, und es folglich mit Recht für besser halten, ihre Beobachtungen andern unverbessert mitzutheilen, als sie durch eine unsichere Verbesserung zu verderben.

Fünfter Abschnitt.

Von der Wahl der Standörter, und Beurtheilung der Fehler der Seiten, welche aus den Fehlern der Winkel entstehen.

§. 179.

Der Gegenstand, den wir iezt zu behandeln uns vornehmen, faßt viele nüzliche Betrachtungen in sich, von denen wir, da wir alle unmöglich verfolgen können, vorzüglich nur die folgenden umständlich auseinander sezzen wollen. Zuförderst wollen wir die Methode zeigen, wie man aus einem gegebenen Fehler, der beym Aufnehmen eines Winkels begangen wird, den Fehler der ihm gegenüber stehenden Seite beurtheilen könne. Hiernächst wollen wir untersuchen, wie man einen Standort zu wählen habe, daß, gesezt es wäre in einem oder zweyen Winkeln gefehlet, man die Seite, die man messen will, so akkurat als möglich bekomme, oder der Fehler doch wenigstens ganz unbeträchtlich werde. Weil man auch oft durch die Trigonometrie die Lage eines Orts in Ansehung zweyer andern gehörig zu bestimmen pflegt, welches, wenn man bey dem Aufnehmen der Winkel irret, ohne einen Fehler nicht geschehen kann; so wollen wir fernerhin erforschen, wie man es erhalten könne, daß die Spitzen des

falschen

falschen und wahren Triangels, den man messen will, so wenig als möglich voneinander entfernt sind. Denn ich glaube nicht, daß man bey der ietzt angenommenen Vorausetzung von den fehlerhaften Winkeln mehr wird herausbringen können. Habe ich dieses erklärt, so werde ich noch einige Betrachtungen über den Einfluß solcher Fehler, die in dem ersten Triangel begangen sind, auf die übrigen, die durch gemeinschaftliche Seiten untereinander verbunden sind, anstellen, so wie auch über die Wahl der Standörter, wenn man die Entfernungen zweyer Oerter messen soll, zu deren keinem man kommen kann.

§. 180.

Damit aber die Anfänger das, was wir sagen werden, wohl verstehen mögen, so wollen wir, ausser dem Lehnsatz, den wir im 154. §., die Reduktion der Winkel zum Centro betreffend, vorausgeschikt haben, noch ietzt annehmen, daß die Sinus von Winkeln, die nicht sehr voneinander unterschieden sind, so wenig voneinander unterschieden sind, daß wenn man das Verhältniß eines von ihnen zu einem gewissen dritten Sinus angiebt, der eine für den andern ohne eine merkliche Veränderung des Verhältnisses gesezt werden kann.

Exempel. Wenn sich eine kleine Grösse A zu einer kleinen Grösse B verhält, wie der Sinus von 15° 27′ zum Sinus totus, so wird man statt des Sinus des Win-

kels von 15°27′ auch den Sinus eines Winkels, der von diesem nicht sehr unterschieden ist, als von 15°30′ nehmen können. Denn wenn man dieses Verhältniß mit Zahlen (und zwar vermittelst der Logarithmen) ausdrükt, so wird das Verhältniß des sin. 15°27′ zum Sinus totus seyn, fast wie 1 zu 3,753, ingleichen das Verhältniß des Sinus von 15°30′ zum Sinus totus wie 1 zu 3,742. Die Differenz ist 0,011, folglich wenn man bey B (welches der Voraussetzung nach eine kleine Grösse ist) um eilftausend Theile, oder fast um ein Hundertheil fehlete, so wird man den Fehler kaum merken können.

§. 181.

Mit Fleiß nahmen wir aber bey diesem Exempel die Sinus kleiner Bogen zwischen 15 und 16°. Wenn nemlich auch einerley Differenz zwischen den Bogen da ist, so sind doch die Sinus kleiner Bogen weit mehr von einander unterschieden, als die Sinus grosser, so daß man daher, wenn die Winkel etwas groß sind, um deste eher noch die Sinus wenig voneinander unterschiedener Winkel für einander gebrauchen kann. Daß aber die Differenz der Sinus kleinerer Bogen viel grösser als der Sinus grosser Bogen ist, wenn das Maaß der Bogen in beyden Fällen nicht verschieden ist, beweiset man folgendergestalt. Es seyn (Fig. 66.) die Differenzen Mm, Nn der Bogen AM und Am, ingleichen AN und An sehr klein und unter=

tereinander gleich. Man ziehe die Tangenten MT und Nt, ingleichen mR und nr mit CA parallel, so wird, weil die Bogen Mm und Nn sehr klein sind, zwischen diesen selbst und den Theilen der Tangenten kein merklicher Unterschied statt finden, und die Triangel MRm, MPT; ingleichen Nrn und NQt hat man für ähnlich zu halten, daher MR : Mm = MP : MT und

Nn : Nr = Nt : NQ, und im zusammengesetzten Verhältnissen, da Nn = Mm ist, wird MR : Nr = MP × Nt : NQ × MT. Es ist

aber $Nt = \frac{NQ \times AC}{QC}$ und $MT = \frac{MP \times AC}{PC}$

(§. 52, VII. Form.), daher, wenn dies substituirt wird, so wird

$$MR : Nr = \frac{MP \times NQ \times AC}{QC} : \frac{NQ \times MP \times AC}{PC},$$

oder, wenn man in der zweyten Proportion das Gleiche

wegläßt, $MR : Nr = \frac{1}{QC} : \frac{1}{PC} = PC : QC.$

Man sieht deutlich, daß MR und Nr die Differenz der Sinus sey, welche zu den wenig voneinander unterschiedenen Bogen gehören, daß PC und QC aber die Cosinus der Bogen AM und AN sind. Wir erhalten daher diesen Lehrsatz: Die Differenzen der Sinus, die zu Bogen von gleicher Differenz gehören, befinden sich, wenn der Unterschied klein ist, in dem Verhältnisse

der

der Cosinus. Nun ist der Cosinus des höhern Bogens kleiner, als der Cosinus des niedrigern Bogens; daher sind die Differenzen der Sinus höherer Bogen kleiner als die Differenzen der Sinus niedriger Bogen, wenn die Bogen einerley Differenz voneinander haben. W. Z. E. W.

§. 182.

Dieses vorausgesezt, wollen wir annehmen, es sey bey dem Aufnehmen des Winkels CAB (Fig. 67.) ein kleiner Fehler begangen, so daß statt CAB, DAB genommen wäre, so wird CAD den Fehler des erhaltenen Winkels ausmachen, den ein kleiner aus A mit dem Radius AD beschriebener Bogen Dd mißt, und der seiner Kleinheit wegen von der auf AC perpendikulair stehenden geraden Linie Dd nicht unterschieden ist (§. 154.). Die Grösse des Bogens Dd ist verhältnißmäßig, und wird grösser oder kleiner, je nachdem der Radius AD wächst oder verringert wird, obgleich der Winkel CAD unverändert bleibt. Wenn ferner bey dem Aufnehmen des Winkels CBA kein Fehler begangen wird, und die Seite AB genau ist, so sieht man aus der Auflösung des Triangels ADB, welchen man wegen des Fehlers des Winkels A erhält, daß man statt der wahren Seite BC die Seite BD erhält, und folglich die Seite um DC fehlerhaft wird. Damit nun der beym Winkel begangene Fehler mit dem auf die Seite BC übergetragenen Fehler verglichen werden könne, so

hat

hat man den Bogen Dd auf Zolle und Linien u. s. f. zu reduciren, wenn die Seite BC in solchem Maasse erhalten werden soll. Schon oft haben wir aber diese Verwandlung angestellt. Man sagt nemlich, wie der Sinus totus, den man in Grade verwandelt hat, sich zu der Zahl der Minuten und Sekunden u. s. f., die den Winkel CAD messen, verhält, so verhält sich die Seite AD, die man durch Auflösung des falschen Triangels erhält, zu der Zahl der Zolle, Linien u. s. f., die zum Bogen Dd gehören (§. 154.). Wir wollen in der Folge annehmen, daß diese Reduktion immer schon geschehen sey, da wir im vorhergehenden uns derselben schon öftermahls bedient haben. Weil Dd auf AC perpendikulair steht, so wird, wenn man DC für den Sinus totus annimt, in dem rechtwinklichten Triangel DCd, Dd der Sinus des Winkels DCd = sin. ADB seyn, da ADB von ACB blos durch den Winkel DAC unterschieden ist, und es wird Cd gleichfals für den Cosinus des Winkels C in Rükficht auf den Radius CD genommen werden können. Es ergiebt sich also, daß Dd : CD = sin. C : R, oder, der (auf Zolle reducirte) Fehler des Winkels verhält sich zum Fehler der Seite BC, wie der Sinus des dritten Winkels C zum Sinus totus; ingleichen Dd : dC = sin. C. : cosin. C, oder der Fehler der Seite AC verhält sich zum Fehler des Winkels, wie der Cosinus C zum Sinus eben dieses dritten Winkels C.

§. 183.

§. 183.

Durch eben einen solchen Schluß zeigt man, daß, wenn bey dem Winkel CBA ein Fehler in der Grösse CBc begangen wird, und man einen kleinen Bogen cE, der mit dem Radius Bc beschrieben ist, annimt, alsdenn der Fehler beym Winkel B sich zu dem Fehler in der Seite AD verhalte, wie der Sinus des Winkels D (den man mit dem Sinus des Winkels C gleich schäzet) zum Sinus totus; ingleichen der Fehler in der Seite DB (nemlich DE) zum Fehler des Winkels B, wie der Cosinus C zum Sinus C. Nimt man daher in beyden Winkeln einen Fehler an, und zwar auf einerley Art, nemlich, daß in beyden Fällen entweder zu viel oder zu wenig erhalten sey, so wird, wenn man den Bogen ce beschreibt, der Fehler der Seite AC die Grösse ed + dC, und der Fehler der Seite CB, CD + DE seyn. Man findet nun ed = cD leicht, wenn man sagt: cE : cD = sin. C : R.

Begehet man auf entgegengesezte Art einen Fehler, daß nemlich der Winkel A (Fig. 68.) kleiner als er wirklich ist, und zwar um die Grösse CAc, und der Winkel B zu groß, um die Grösse CBc erhalten wird, so ergiebt sich, daß man statt ACB den Triangel AcB erhält, worinn, wenn man die Bogen Dd, DE und ce beschrieben hat, der Fehler der Seite AC, Dc — dC, und der Fehler der Seite CB, CD — De seyn wird. Es verhält sich aber DE : Dc = sin. C : R, und Dd : dC = sin. C : cos. C.

Inglei=

Ingleichen Dd : CD = sin. C : R, und DE : cE (oder eD) = sin. C : cos. C. Daraus siehet man, wie man die besondern Fehler findet, wenn die Fehler der Winkel gegeben worden sind.

Wäre der Winkel ACB (Fig. 69.) stumpf, und die Fehler von einerley Art (wie bey Fig. 67.), so siehet man deutlich, daß, wenn man eben diese Bogen beschreibt, der Fehler der Seite AC alsdann Ce = cD — Cd seyn, und der Fehler CE der Seite CB dann = CD — ED seyn werde, nemlich eben die Differenz der Sinus, deren Summe wir nach dem angenommenen spitzigen Winkel bey C erhalten haben. Man sieht übrigens leicht, daß wenn man auch bey der Seite AB (Fig. 70.) um die Grösse bB irret, und zwar so, daß in den Winkeln kein Fehler begangen würde, und statt des Triangels ACB der andere AGb entstünde, alsdann der durch den in der Seite AB begangene in der Seite AC entstandene Fehler GC sich zu bB verhält, wie AG zu Ab, oder AC zu AB, und zu dem Fehler CH in der Seite BC, wie AG zu Gb oder AC zu CB. Fehlete man zugleich bey den Winkeln, so wird in AC, KC der ganze Fehler seyn; in BC aber CL, wie sich ergiebt, wenn man die Bogen cK und cI beschreibet, und IL mit AB parallel zieht. Nachdem wir auf diese Art gezeigt haben, wie man die begangenen Fehler beurtheilen müsse, so wollen wir nun sehen, wie man die Standörter zu wählen habe, um sie, wenn man sie

nicht

nicht ganz vermeiden kann, doch wenigstens zu vermindern.

§. 184.

Erste Aufgabe. Wenn man eine Seite AD genau zu bestimmen hat (Fig. 71. n. 1.), und der Winkel DAB nebst der Seite AB ohne Fehler aufgenommen ist, aber bey dem Aufnehmen des Winkels DBA um wenige Minuten gefehlet würde, in der Seite AB, nachdem man ihre Lage erhalten hat, den Standort B zu finden, so, daß der Fehler in der gesuchten Seite AD so klein als möglich werde.

Auflösung. Weil man annimt, daß der Winkel A gegeben sey, und AB in Ansehung der Richtung gleichfals gegeben werde, so nehme man AB so groß, daß der Winkel B so genau als möglich $90° - \frac{1}{2}A$ wird. Ich sage, daß der Fehler DC oder Dc äuserst klein werden werde. Man gedenke sich einen Cirkel CcB, den AB in B berührt, beschrieben, AC aber in DC oder Dc so schneidet, daß der Winkel DBC oder DBc den Fehler des Winkels B mißt. Man nehme nemlich einen jeden andern Punkt b oder β, und ziehe auf denselben die Linien Drb, Cqb, oder Drb, cpb, so siehet man, daß der Winkel DBC, dessen Maaß $\frac{1}{2}$DC ist, grösser als der Winkel DbC sey, dessen Maaß $\frac{1}{2}DC - \frac{1}{2}rq$ ist. Wenn man also bey dem Standorte b um einen gleichen Winkel fehlete, so müßte der Bogen DC, folglich auch seine

Sehne,

Sehne, welche der Fehler in der gesuchten Seite ist, grösser seyn, als wenn man in dem Standort B diesen Fehler machte. Aber nach der Geometrie verhält sich DA : AB $\equiv$ AB : AC, und $\sqrt{AD \times AC} = AB$, und da DC sehr klein ist, so wird AD oder AC mit AB fast gleich kommen, und der Triangel DAB ein gleichschenklichter seyn, folglich der Winkel ABD $\equiv$ ADB; es ist aber ABD $\equiv$ 180° — ADB — DAB, oder 2ABD $\equiv$ 180° — A, ingleichen ABD $\equiv$ 90° — $\frac{1}{2}$A. Wählt man daher den Standort in B auf diese Art, so wird der Fehler in der gefundenen Seite sehr klein seyn. W. Z. S. W.

§. 185.

Erster Zusatz. Bey der Praxis findet man selten den Winkel A ohne Fehler, ausser wenn man eine perpendikulaire Höhe KI (Fig. 44.) zu messen hat, wozu man kommen kann, denn alsdann erhält man einen rechten Winkel H oder I, und man sieht aus der Auflösung, daß IL $\equiv$ IK genommen werden müsse, welches man auch erhält, wenn der Winkel KCH so nahe als möglich 45° ist. Ausser diesem Umstand, daß der Winkel A selten genau genug aufgenommen ist, würde auch das sehr beschwerlich seyn, daß (Fig. 71. n. 1.) die Grundlinie AB so lang zu nehmen wäre, als selbst die zu messende Seite ist. Wenn aber AB $\equiv$ AD, oder B $\equiv$ 90° — $\frac{1}{2}$A genau wäre, so hätte man die Rechnung nicht nöthig; sondern aus der

blossen Messung von AB würde die Länge der gesuchten Seite sich ergeben.

§. 186.

Zweyter Zusatz. Wenn der Winkel A, folglich die Lage der Grundlinie AB nicht gegeben wird, so sieht man deutlich, daß der Fehler DC um desto kleiner werden werde, je kleiner die Seite BD gewesen ist. Denn da der Fehler des Winkels DBC sich zum Fehler der Seite DC, wie der Sinus C oder D zum Sinus totus verhält (§. 182.), so würde, wenn die Seite BD bis ins unendliche verkleinert wird, der Fehler des Winkels stets kleiner werden. Es ist aber wider unsere Vorausseżzung, daß die Seite AB auf AD fallen sollte. Auch trifts, ausser dem in dem ersteren Zusatze angeführten Fall, kaum ein, daß man den Winkel A, ohne einen Fehler zu begehen, erhält. Man hat daher vielmehr nöthig zu fragen, was man auf einer Linie, wenn ihre Lage gegeben ist, für einen Standort zu erwählen habe, wenn bey beyden Winkeln Fehler statt finden, und zwar zuerst, wenn man annehmen kann, daß die Fehler von einerley Art sind; hiernächst, wenn man auf verschiedene Art fehlet. Es entsteht hieraus wiederum eine doppelte Frage.

§. 187.

Zweyte Aufgabe. Wenn die Lage der Seite AB gegeben wird (Fig. 71. nr. 2.), und man nimt an, daß bey dem Winkel A der Fehler CAc, und bey B der Fehler

ter CBc auf einerley Art begangen ist, man soll den Standort E finden, so daß der Fehler der Seite AC so klein als möglich wird.

Auflösung. Wir zeigten im 183. §. daß der Fehler der Seite AC (wenn man den Bogen ce beschreibt) eC sey. Nennt man den Fehler des Winkels A = E . A, und den Fehler des Winkels B = E . B, so wird er durch

$$\frac{E.B \times R + E.A \times \text{cos. } C}{\text{Sin. } C}$$

ausgedrükt werden. Man siehet leicht, daß eC um desto kleiner werde, je näher der Punkt c an D kommt. Man lasse von C auf AB ein Perpendikel CF fallen, das Bc in K schneidet. Man siehet, daß c um desto näher nach D komme, je näher K nach C kommt, das ist, je kleiner CK ist. CK wird aber desto kleiner werden, je kleiner der Fehler auf FC wäre, wenn man aus dem Standorte B die Linie FC messen sollte. Aus dem vorhergehenden weiß man auch, daß CK sehr klein werde, wenn FE = FC würde, daher muß man den Standort in E so nehmen, daß FE = FC wird, welches man erhält, wenn AE so lang genommen wird, daß der Winkel bey E so nahe als möglich 45 Grad wird. W. Z. F. W.

§. 188.

Anmerkung. Ohne Zweifel macht die Ausmessung einer so grossen Grundlinie als AE ist (welche stets viel grösser

als AC seyn wird, wenn der Winkel bey A nicht sehr klein ist, da AF + FC > AC) oft mehr Mühe, als vielleicht der Vortheil bey dem kleinen Fehler in der Seite AC einbringt. Indessen wollte ich doch gern die Auflösung zeigen, da der Fall sich wirklich zutragen kann, wo an der genauen Messung der Seite AC mehr als an aller Arbeit gelegen ist. Es können die Anfänger übrigens hier sich das im allgemeinen merken, daß man kaum annehmen kann, daß wenn Winkel mit einerley Instrument aufgenommen werden, ihre Fehler verschieden seyn sollten, indem wir hier nicht von Fehlern reden, welche durch Fehler der Instrumente, sondern blos durch fehlerhaftes visiren veranlaßt werden. Wir werden daher in der Folge diese Voraussetzung festsetzen, wenn nicht besondere eigene Nebenumstände das Gegentheil anrathen werden.

§. 189.

Dritte Aufgabe. Wenn die lage der Seite AB gegeben wird, und man fehlet bey beyden Winkeln A und B auf entgegengesetzte Art, man soll den Standort B suchen, damit der Fehler in der Seite AC so klein als möglich werde (Fig. 72.).

Auflösung. Man nehme bey B einen Winkel an, der einem rechten so nahe als möglich kommt, und wenn AC die gesuchte Seite ist, so wird sie von Ac kaum merklich unterschieden seyn. Denn man denke sich einen hal-

den um AC beschriebenen Cirkel, so wird Ac die Sehne des Bogens ABc seyn, der von einem halben Cirkel um den Bogen Cc unterschieden ist, und für eine gerade Linie gehalten werden kann, und es wird $Ac = \sqrt{AC^2 - Cc^2}$ seyn; wir haben aber schon gezeigt (§. 97.), wie klein der Unterschied zwischen AC und $\sqrt{AC^2 - Cc^2}$ sey, auch dann, wenn $Cc = \frac{1}{120}$ von AC ist. Es hat nun auch Cc zu AC ein viel kleineres Verhältniß, weil, wenn mit dem Radius AC ein Bogen beschrieben wird, der den Fehler des Winkels A mißt, selbiger von Cc nicht merklich differiren kann, und man diesen Bogen von wenigen Minuten annehmen muß, daher der Unterschied zwischen AC und Ac kaum merklich ist.

§. 190.

Anmerkung. Die Vermuthung, daß es entgegengesetzte Fehler sind, wenn man bey der Aufnahme beyder Winkel fehlet, ist nur um einen Grad wahrscheinlicher als die andere, daß die Fehler von einerley Beschaffenheit wären; darf man daher gleich nicht mit Gewißheit annehmen, daß man auf einerley Art gefehlet habe, so bleibt doch die **Ungewißheit** in Absicht des Fehlers der gesuchten Seite so groß, als geschehen würde, wenn die Fehler übereinstimmten.

§. 191.

Vierte Aufgabe. Wenn die bey der Aufnahme der Winkel gemachten Fehler von einerley Art sind, und die Seite AB nicht in Absicht der Lage gegeben wird, oder man hat die freye Wahl eine Grundlinie zu suchen, so frägt es sich, ob man nicht irgend einen Standort B (Fig. 73.) bekommen kann, damit der Fehler in der Seite AC unmerklich werde?

Auflösung. Es sey AC die gesuchte Seite, man errichte über ihr einen gleichschenklichten Triangel, der bey O rechte Winkel hat, und ziehe über AO, welches man verlängert, einen halben Cirkel; auf beyden Seiten nehme man bey C kleine Bogen CF und CE, die einander gleich sind, deren Hälften die bey den Winkeln begangene Fehler messen. Man ziehe AE, welche CO in K schneidet, und ziehe damit aus A den Bogen Cc, der das Maaß des Fehlers ist; durch F und c ziehe man eine gerade Linie, die auf die Peripherie in B stoßt, so wird B der gesuchte Standort seyn. Denn man kann leicht sehen, daß, wenn ein jeder von den beyden Winkeln um die Grösse CAE und FBC kleiner ist, man statt der Seite AC die ihr gleiche Seite Ac erhält. Aber es ist nun die Frage, wie man auf dem Felde den Standort B finden könne. Da AC ein Quadrant ist, so wird CBA 45° seyn, und da der kleine Bogen CE von der Sehne glei-

ches Nahmens nicht unterschieden ist, so wird auch CEK ein halber rechter Winkel seyn. Folglich ist auch CKE ein solcher, da KCE = 90° ist. Weil nun Cc auf KE perpendikulair stehet, so wird auch Kc = cE seyn.

Man ziehe KF, diese wird KE gleich seyn, da CF = CE; folglich ist FKC = CKE = 45°, und FKE = 90°, daher steht FK auf Kc perpendikulair, und wird, wenn man sie verlängert, durch D gehen. Daher verhält sich FK : Kc = 2 : 1 = R : tang. DFB. Aus den Tafeln erhält man BFD fast = 26°34′, den Bogen DB = 53° 8′, daher BC oder BE = 36° 52′, endlich den Winkel CAB = 18° 26′. Hat man den Winkel CBA = 45° und CAB = 18° 26′, so ist der Standort B bestimmt. W. Z. S. W.

§. 192.

Zusatz. Nimt man CA = 1 an, so findet man den Logarithmen von AB = 0,1020539, wozu zunächst 1,265 gehört.

§. 193.

Wir wollen jetzt sehen, wie die Rechnung hiermit übereintrift. Wir wollen annehmen, wir fehlten bey den einzelnen Winkeln um 5′, daher werde CAB = 18° 21′, und CBA = 44°55′ genommen, so wird das Supplement von ACB = 63° 16′ seyn, und sin. 63° 16′ : sin. 44° 55′ = AB : AC.

Log. 44°55′ = 9,8488524
Log. AB = 0,1020539

Summe = 9,9509063
Sin. 63°16′ = 9,9509049

Die Differenz = 0,0000014, wozu fast $\frac{3}{100000}$ gehört; sie geht also um 0,00003 über 1 (welches gefunden wäre, wenn kein Fehler bey den Winkeln statt gefunden hätte), das ist, wäre AC = 1000 Fuß gewesen, so würde der Fehler fast 4 Linien betragen.

§. 194.

Anmerkung. Man kann nicht leugnen, daß diese Art den Standort zu suchen, dadurch sehr lästig wird, weil man die Grundlinie AB messen muß. Ausserdem bleibt bey diesem Standorte die Seite um den Fehler cE, der dem Fehler vom Winkel A, nemlich Cc gleich ist, ungewiß, da es wahrscheinlicher ist, daß die Fehler in den Winkeln nicht von einerley Art sind, als daß auf beyden Seiten auf einerley Art gefehlt seyn sollte. Es macht übrigens keinen Unterschied, wenn man annimt, daß die Winkel die wahren um eine gleiche Grösse überschreiten, weil man in diesem Falle nur aus A durch F und aus B durch E gerade Linien zu ziehen, und das Perpendikel OC bis an den Ort, wo sie sich in K begegnen, zu verlängern hat, welches beym Beweise nichts ändert. Nimt man

an,

an, daß man nur bey dem Winkel A fehle, und die gesuchte Seite AC einem Winkel B gegenüber stehe, den man ohne Fehler hat, so leuchtet hier deutlich hervor, daß man keinen andern Standort als D erwählen müsse, da Cc dahin gerichtet ist, und Ac = AC wird. Ist aber nicht sowol daran etwas gelegen, daß man eine Seite genau erhält, als daß vielmehr die Lage der Spitze des Triangels, den man nach vorausgesezten Fehlern erhält, so wenig als möglich von der Lage der Spitze des wahren Triangels abweichen soll, welchen man, ohne Fehler bey den Winkeln zu begehen, erhalten hätte, so findet folgende Aufgabe statt.

§. 195.

Fünfte Aufgabe. Wenn man annimt, daß die begangenen Fehler beym Aufnehmen der Winkel gleich sind, den Standpunkt B (oder b) (Fig. 74.) so zu finden, daß die Entfernung Cc von der Spitze des wahren Triangels ACB, oder ACb, von dem falschen AcB oder Acb so klein als möglich werde.

Auflösung. Weil man annimt, daß man bey dem Maaß des Winkels A um den Winkel CAc fehle, so kann die Weite der Spitzen nicht kleiner als Cc, der Fehler vom Winkel A, werden, wo man auch den Standort B, b und den in B (oder b) gleichen Fehler annimt. Denn da Cc perpendikulair auf AC steht, und fast auf Ac, auch die

Fehler einander gleich sind, so ziehe man aus B auf Ac eine Linie, die sie irgendwo, ausser in c durchschneidet. Die Entfernung der Spitzen würde die Hypotenuse des bey c rechtwinklichten Triangels, und folglich grösser als der Cathete Cc seyn. Eben so ist es, wenn die Fehler der Winkel entgegengesezt sind. Man sieht daraus, daß der Standort B in dem Fall, daß die Fehler von einerley Art sind, so gewählt werden müsse, daß, wenn wir annehmen, es sey um Cc, als einen Diameter, ein Cirkel CDcd beschrieben, sich Cc : cD = AC : CB oder cB verhalte; denn alsdann sind die Fehler der Winkel gleich. Eben dieses muß in dem Fall, daß die Fehler einander entgegengesezt sind, geschehen, nemlich es muß Cc : cd = CA : cb. Es giebt daher keine bestimmte Punkte B und b, aber für B werden die Winkel AcB stets stumpf, für b aber spitzig seyn.

§. 196.

Erster Zusatz. Der einzige Winkel bey C ist ausgenommen. Denn wenn man auf der verlängerten Linie Cc, wo man will, einen Punkt G annimt, und zieht von da eine gerade Linie, welche von dem wahren Punkte C abweicht, so wird sie die gerade Linie Ac entweder zwischen c und F, oder zwischen c und A schneiden, und der Unterschied der Spitzen wird die Hypotenuse des rechtwinklichten Triangels und grösser als Cc.

§. 197.

§. 197.

Zweyter Zusatz. Der Winkel ACb ist in dem Falle, daß die Fehler entgegengesetzt sind, um so viel kleiner als ein rechter Winkel, als er im Fall, daß sie von gleicher Art sind, grösser ist als 90°, wenn man die Seiten cb, cB gleich setzt. Es ist nemlich alsdann cd = cD, und folglich dCc = DCc.

§. 198.

Dritter Zusatz. Wenn die Entfernung der Spitzen Cc sehr klein ist, so erhält man auch die Seite AC ohne Fehler, weil Ac = AC. Man sieht daraus, daß 1) wenn die Fehler nicht von gleicher Art sind, der Winkel AbC fast ein rechter Winkel werde; ACB aber um desto stumpfer sey, wenn die Fehler von gleicher Art sind, daß auch die Grundlinie AB um desto länger ist, je grösser die Seite cB oder CB angenommen wird. 2) Siehet man hieraus, daß die vierte Aufgabe auf mehrere Art aufgelöst werden könne, und unbestimmt sey.

Anmerkung. Bey der vierten Aufgabe haben wir den Winkel CAB = 18°26′ für einen besondern Fall festgesezt. Wenn man AC (Fig. 75.) verlängert, und mit CL = $\frac{1}{2}$AC als Radius einen halben Cirkel beschreibet, und aus A den Tangens AB zieht, so ergiebt es sich, daß CAB der größte Winkel werde, den man haben kann.

Denn

Denn der Punkt B wird stets in die Peripherie des um das Centrum L beschriebenen Cirkels fallen, da die Winkel cAC und cBC der Voraussetzung nach, einander gleich sind, und eine gerade Linie, die aus einem jeden andern Punkte, ausser dem, wo sich in B die Linien berühren, auf A gezogen ist, wird stets innerhalb des Winkels CAB fallen. Es verhält sich aber AL : LB = 3 : 1 = R : sin. CAB, woraus man CAB etwas grösser als 19°28′ erhält.

Man sieht übrigens leicht, daß, wenn man bey Fig. 73 und 72 aus dem Centro B die Bogen Cd und cd zieht, sie den Sehnen cD und cd in der 74. Fig. entsprechen.

§. 199.

Wenn man aus zwey Standorten A und B (Fig. 76. Tafl. VII.) die Weite CD zu messen hat, so können zu vielerley Vermuthungen in Absicht der Fehler in den Winkeln entstehen, als daß es sich der Mühe verlohnen sollte, von ihnen weitläuftig zu reden. Wir bemerken daher nur folgendes. Erstlich: Wenn die bey den Winkeln DBA und CAB begangenen Fehler von einerley Art sind, und z. B. dBD und CAc sind; die in den Winkeln CBD und CAD begangenen aber zwar unter sich von gleicher Art, aber den erstern entgegengesezt sind, so entsteht in CD der größte Fehler, da man statt CD, cd erhält. Fehlte man bey allen so, daß man sie zu groß erhielte, so bekäme man Kk; erhielte man sie zu klein, so bekäme man $\varkappa\delta$; beyde Linien sind aber grösser

als

als cd und kommen CD näher. Zweytens: Wenn die Fehler der Winkel DBA und CAD von gleicher Art sind, und sind denen Fehlern der Winkel DBC und CAB, die gleichfals von einerley Art sind, entgegengesezt, so wird der Fehler der Seite CD der Unterschied zwischen CD und kK, oder zwischen CD und xd seyn, so daß diese Fehler den Fehler der Weite CD verringern, oder fast ganz aufheben. **Drittens:** Bey dem Fehler, den wir zuerst angeführt haben, wenn statt CD cd erhalten wird, wird der Fehler der Seite CD um so viel kleiner seyn, je mehr die Grundlinie AB theils der paralellen Lage mit CD, theils ihrer Länge näher kommt. Denn nimt man die parallele Lage an, so verhält sich CD : cd = DG : dG. **Viertens:** Wenn die Winkel DBC und CAD sich rechten Winkeln nähern, und die Fehler der Winkel DBA und DBC, ingleichen CAB und CAD einander entgegengesezt, aber von gleicher Grösse sind, so wird der Fehler bey der Weite CD klein seyn oder gar keiner statt finden, wenn nur die Summe der Winkel DBA + DAB fast gleich der Summe CAB + CBA ist. Denn alsdann ist die Seite, die man statt CD erhält, als z. B. kK oder xd eine Sehne, die dem Diameter eines Cirkels, worin die Winkel A und B sind, sehr nahe kommt, oder sie ist der Diameter selbst = CD, und die Winkel C und D befinden sich an der Peripherie eben dieses Cirkels. Man wird aber das, daß die genannten Summen der Winkel einander sehr gleich kommen,

men, erhalten, wenn man dafür sorgt, daß die Grundlinie AB mit CD fast parallel und nahe an ihrer Mitte zu liegen kommt.

§. 200.

Die in diesem Abschnitte vorgetragene Materie habe ich in einer kurzen teutschen Abhandlung, die zu Wien 1766 herausgekommen ist, etwas genauer abgehandelt. Es kommen darinn mehrere Bemerkungen vor. Die jezt vorgetragenen mögen für uns hinreichend seyn, wenn ich noch einiges von dem Einfluß der Fehler auf eine Reihe von Triangel, die durch gemeinschaftliche Seiten miteinander verbunden sind, gesagt haben werde. Es kommt nicht allein viel darauf an, von was für Art die Triangel sind, sondern auch, was für Seiten von ihnen vorzüglich nach der Länge der Reihe gelegen sind. Sind diese kleinen Fehlern ausgesetzt, so wird die Weite der äussersten Grenzen aus dieser Reihe der Triangel viel genauer gefunden werden. Ein Beyspiel hiervon giebt uns leicht die doppelte Reihe der Triangel in der 77. Fig. Die eine mag aus blossen gleichseitigen Triangeln, ACB, CBL, BLM, LMN, MNO, NOP bestehen, die andere bloß gleichschenklichte rechtwinklichte Triangel, ADB, DBF, BFM, FMQ, MQO, QOZ enthalten: ihre Hypotenusen sollen nach der Länge einer geraden Linie, die die äussersten Grenzen AW verbindet, liegen, und des erstern Triangels

DAB

DAB Hypotenuse soll der Seite AB des ersten gleichseitigen Triangels ACB gleich seyn. Wir wollen annehmen, es würde in den Winkeln A und B ein gleich grosser Fehler und zwar von einerley Art begangen, so daß man statt der Seite AC oder BC die Seite Ad erhielte. Weil die Fehler gleich sind, so werden die sie messenden Bogen, sich wie die Seiten selbst verhalten, oder cd : ef = AC : AD; nimt man die Seite AB = AC = L, so wird, weil der Winkel dCc = 30°, sich cd : dC = 1 : $\sqrt{3}$ verhalten. Wir wollen ausserdem annehmen, daß cd der nte Theil der Seite AC oder Ad sey, so wird der Fehler dC = $\frac{L\sqrt{3}}{n}$ seyn. Nehmen wir an, daß weiter kein Fehler begangen werde, so wird man statt der erstern Reihe etwa AcB, cBG, BGH, GHI, HIY, IYK haben, und die fünf Seiten der andern werden einzelne L — $\frac{L\sqrt{3}}{n}$ seyn. Weil in dem rechtwinklichten Triangel auch AB : AD = $\sqrt{2}$: 1, so wird AD = — $\frac{L}{\sqrt{2}}$; weil auch die gleichen Fehler, oder die ähnlichen Bogen sich wie die Seiten verhalten, so wird cd : ef = L : $\frac{L}{\sqrt{2}}$, und da wir angenommen haben, daß es der nte Theil des Radius sey, so wird sein Werth $\frac{L}{n\sqrt{2}}$, weil nun der Triangel efD ein rechtwink-

lichter

lichter und gleichschenklichter Triangel ist, so wird cd = $fD = \frac{L}{n\sqrt{2}}$ seyn, folglich ae = $\frac{L}{\sqrt{2}} - \frac{L}{n\sqrt{2}}$ seyn.

Da nun der Vorausseßung nach kein Fehler nach diesem weiter begangen ist, so werden ferner die Catheten der Triangel eBR, RST, STV u. s. insgesammt mit $\frac{L}{\sqrt{2}} - \frac{L}{n\sqrt{2}}$ gleich seyn. Man muß nur acht geben, was für ein Fehler bey der Hypotenuse entsteht, deren Quadrat $= 2\left(\frac{L}{\sqrt{2}} - \frac{L}{n\sqrt{2}}\right)^2$ seyn wird, daher wird die Hypotenuse selbst $= \sqrt{2} \times \left(\frac{L}{\sqrt{2}} - \frac{L}{n\sqrt{2}}\right) =$ $L - \frac{L}{n}$ seyn. Man siehet hieraus, daß eben dieser Fehler in den Winkeln der Hypotenuse der rechtwinklichten Triangel in der Reihe weniger schädlich sey, als den Seiten der Reihe der gleichseitigen Triangel, weil $L - \frac{L}{n} > L - \frac{L\sqrt{3}}{n}$. Daher nähert sich die Reihe der rechtwinklichten Triangel, von welchen der lezte TVX ist, mehr der Grenze W, als die Reihe der gleichseitigen, von denen der leztere IYK ist.

§. 201.

§. 201.

Noch weit mehr würde man bey dem Maasse der Weite AW fehlen, wenn man auch in den übrigen Triangeln nach dem ersten gleiche Fehler beginge, wenn sie auch alle von einerley Art wären. Aber dies darf man auch nicht annehmen, da es um desto unwahrscheinlicher ist, daß die Fehler von gleicher Art seyn sollten, je grösser die Zahl der Triangel ist, und eben ein solcher Grad der Wahrscheinlichkeit bey den einzelnen Triangeln statt findet, daß die Fehler ungleicher Art sind.

Man kann hiernächst nun wohl schwerlich bey der Ausübung eine Reihe gleicher Triangel bekommen, und es scheint auf nichts mehr Acht gegeben werden zu müssen, als daß kein Winkel sehr klein werde, denn alsdann würde der Fehler in der entgegengesezten Seite desto merklicher werden, weil diese Seite gegen die übrigen Seiten zu klein würde, und ein Fehler oft auf gleiche Art in die Reihe der Seiten einen Einfluß hat. Kann man daher die Standörter nach Gefallen wählen, so muß man einen jeden Winkel, der unter 25° ist, vermeiden. Ausserdem müssen auch die Triangel nicht zu klein seyn, weil sonst nicht allein ihre Zahl zur grossen Beschwerde in Absicht der Berechnung sehr anwachsen, sondern auch die Reduktion der Winkel zum Centro unsicherer werden würde. Wer aber grössere Messungen von dieser Art vornehmen will,

der muß, wie ich schon gesagt habe, mit ganz andern Hülfsmitteln, als ich ihm hier anweisen kann, versehen seyn.

Hier wird es nicht unrecht angebracht seyn, wenn ich die Anfänger von dem Gebrauche einiger optischen Instrumente unterrichte, durch deren Hülfe man die Entfernung eines Orts von einem Standort aus, wie man sich ausdrükt, findet. Schon längst sind von verschiedenen Personen verschiedene Instrumente von dieser Art ausgedacht, und bald wieder verworfen worden, da sich bald ihre Untauglichkeit zeigte. Andere versuchten es hierauf auf eine feinere Art mit den Mikrometern. Man könnte etwa auf diese Art das Instrument verfertigen. Es sey auf einer Tafel EFGH (Fig. 108.) ein Tubus AB befestigt, so daß seine Axe mit der Grundlinie BD genau rechtwinklicht stehe; CD sey ein anderer Tubus entweder auch befestigt, oder auch um das Centrum D bewegbahr, daß sein anderes Ende F den Quadranten FKI durchlaufen könne. Beyde Tubi müssen ein Mikrometer haben. Visirt man durch den Tubus AB nach dem Objekt, daß dasselbe in dem Durchschnittspunkte der Faden erscheint, und daß man in dem andern Tubo durch den Mikrometer seine Entfernung von dem mittlern Vertikalfaden erhält, so erhält man in der That den Winkel, unter welchem aus dem Objekte die Entfernung der parallelen Tubus B und D erscheinen muß, und man erhält

daher

daher in dem rechtwinklichten Triangel die Grundlinie DB, den rechten Winkel bey B und den Winkel beym Objekt, man findet hiernächst hieraus die Weite des Objekts durch die gewöhnliche Auflösung. Ist die Entfernung nicht sehr groß, daß sich der Winkel beym Objekt auf etliche Grade oder überhaupt auf einen grössern beläuft, als man mit dem Mikrometer fassen kann, so könnte man den Tubus CD auf dem Quadranten bewegen und auf dem Bogen FKI die Zahl ganzer Grade, Minuten und Sekunden durch den Mikrometer aufnehmen. Diese Messung wird daher in der That nicht durch einen, sondern zwey Standörter B und D unternommen. Was man aber auch bey dieser Art von Instrumenten ausdenken mag, das läuft endlich doch ganz hierauf hinaus.

Es sey daher AB (Fig. 109.) die Grundlinie des Triangels CAB, der bey A rechtwinklicht ist. AB soll der Weite der parallelen Tubus BD in der vorigen Figur gleich seyn, und C der Winkel beym Objekte, der alsdann sehr klein ist, wenn die Weite AC oder BC (welche nicht merklich unterschieden seyn können) groß ist. Wir wollen sehen, in wie fern man einer solchen Messung trauen könne.

Es ist gewiß, daß selbst bey sieben oder acht Fuß langen Tubis die Winkel bis 3″ oder 4″ kaum gewiß sind. Wir werden also viel einräumen, wenn wir dem Meßin-

strumente bis auf 5″ gewisse Winkel geben. Es sey AB = 3′ 5″ 8‴ oder 500‴. Wir wollen annehmen, man fehle um den Winkel EBD = 5″, so wird der Fehler in der Weite = EC seyn, wenn man sich vorstellt, daß aus dem Centro B ein Bogen ED beschrieben sey. Es ist zuerst hier die Frage, wie groß die Weite AC seyn könne, daß EC etwan $\frac{1}{1000}$ theil von ihm wäre? Man wird sie leicht finden, wenn man bemerkt, daß die Triangel CAB und CED einander fast ähnlich sind, weil der Winkel bey B nur als um 5″ von einem rechten unterschieden angenommen wird. Daher wird sich ED : AB = CE : CA verhalten. Es muß sich aber der Voraussetzung nach CE : CA = 1 : 1000; daher ist es nothwendig, daß auch ED der tausendste Theil von AB sey, d. h. daß $\frac{ED}{500‴}$ = $\frac{1}{1000}$ = $\frac{1}{2}$‴, folglich ist noch übrig die Weite zu suchen, bey welcher $\frac{1}{2}$‴ unter einem Winkel von 5″ erscheint, welches man finden wird, wenn man sagt: 5″ : 206264″,8 = $\frac{1}{2}$‴ zur gesuchten Weite. Man findet AC nicht grösser als 143′ 2″ 10‴,5; der Fehler CE selbst wird 1″ 8‴,6 seyn. Man siehet hieraus, daß für grosse Entfernungen diese Art von Instrumenten ganz untauglich sind, wenn bey der Arbeit einige Genauigkeit gefodert wird, und daß für kleinere zu eben dieser Genauigkeit die gewönlichen Instrumente hinreichen, indem die Messung einer nicht grossen Grundlinie so beschwerlich

eben

eben nicht ist, daß der Aufwand zu dergleichen kostbaren Instrumenten damit könnte in Vergleichung gebracht werden.

Man kann zum andern fragen, wenn die Weite AC z. B. 2000′, welches gewiß noch nicht groß heissen kann, betrüge, wie viel kann man dabey fehlen, wenn man den Fehler in dem Winkel = 5″ annimt? Bey dieser Voraussetzung, wenn AB und AC gegeben ist, findet man mit leichter Rechnung den Winkel bey C = 0° 6′ 58″. Weil der Fehler EBD = 5″, so wird der Winkel AEB um 5″ grösser als der erstere, und = 0° 7′ 3″ seyn. Kleine Winkel, wie die gegenwärtigen, verhalten sich fast wechselsweise wie die Entfernungen AC und AE; daher 7′ 3″ : 6′ 58″ = 2000′ : AE, welches man etwas gröſſer als 1976,3′ erhält, daß also CE wenigstens 23′,6 beträgt, welcher Fehler bey einer solchen Weite gewiß beträchtlich ist. Man siehet hieraus, daß man Instrumenten von dieser Art wenig trauen könne.

Sechster Abschnitt.

Von der Libellation oder Abwägung der Horizontallinie.

§. 202.

Libelle oder Horizontwage heißt ein jedes Instrument, wodurch eine Linie bestimmt wird, die durch das

Auge des Beobachters gehet, und auf desselben Vertikallinie perpendikulair stehet. Wenn nemlich der Beobachter in A (Fig. 63.) stehet, so ist AEC seine Vertikallinie; aber AH, die auf AC in A perpendikulair stehet (in dem Punkte A gedenkt man sich das Auge des Beobachters), ist die Linie der Horizontwage, sonst die Horizontallinie genannt, und das Instrument, wodurch ihre rechte Lage gefunden wird, ist die Wage. Es ist daher der wahre Horizont der Erde (die man hier als kugelförmig annimt), oder der Horizont des Beobachters in A, ein anderer, als die Linie, die die Wage bestimmt, nehmlich der mit dem Radius CA beschriebene Bogen, und man sagt von dem, was sich in diesem Bogen befindet, daß es sich in einerley wahrem Horizonte befinde; was aber in der Linie der Wage liegt, das, sagt man, befinde sich in einerley scheinbarem Horizonte, und nennt daher auch die Linie der Wage den scheinbaren Horizont. Hieraus folgt, daß das, was in einerley wahrem Horizonte ist, einerley Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde habe, folglich, da flüßige Sachen durch ihre Schwehre sich nach nichts anders, als nach dem Mittelpunkt der Erde bewegen, so muß Wasser, welches in einerley wahrem Horizonte ist, nicht fliessen, sondern stehen. Was sich aber in einerley Linie der Horizontwage befindet, hat keinesweges, wenn nemlich die Objekte sehr

weit voneinander entfernt sind, einerley Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde. Dies kann man aus der Figur sehen, denn der Punkt L ist mit dem Punkte B auf einerley Linie der Wage; weil aber der wahre Horizont des Punktes B der Bogen BD ist, so würde, wenn ein Kanal nach der Richtung der Linie LB geführt würde, das Wasser von L nach B fliessen, indem LC grösser ist als DC oder BC. Endlich kann man auch sehen, daß die Linie der Horizontwage nichts anders als der Tangens des Bogens oder des wahren Horizonts sey, daß auch, wenn ein Objekt einem in B stehenden Beobachter sichtbar seyn soll, es sich (wenn wir übrigens nicht auf die Strahlenbrechung sehen) nothwendig in dem Sekanten dieses Bogens CA befinden müsse, von welchem der lezte Punkt, den man sehen kann, L selbst ist; was unter diesem Punkte ist, kann nie gesehen werden, wenn sich nemlich das Auge des Beobachters B in dem wahren Horizonte befindet; wäre es aber über ihm erhoben, so würde es alles sehen können, was zwischen B und dem Punkte liegt, wo der aus dem Auge nach dem wahren Horizont gehende Strahl ihn berühret.

§. 203.

Man hat oft nöthig zu libelliren, oder zu finden, um wie viel ein Ort höher als ein anderer sey, oder vom Centro der Erde abstehe, wenn etwa ein Aufweg nicht steil und jäh, wie bey vielen Bergen ist, sondern sich allmäh-

lig erhebt, welchen man durch die Trigonometrie nicht füglich messen kann. Oft hat man Wasser abzuleiten, oft die Betten von Bächen und Flüssen zu verändern, anderer Ursachen, die häufig auf mannigfaltige Art vorkommen können, zu geschweigen. Man hat bey diesen Fällen vorher mit der größten Sorgfalt zu erwägen, ob zwischen dem Ort, von welchem das Wasser abgeleitet werden soll, und dem, nach welchem ein Kanal geführt werden soll, der Boden abhängig ist, damit man nicht die Kosten von einem unvorsichtigen Unternehmen verschläudere, oder auch wol zuweilen die ganze umliegende Gegend einen grossen Schaden leide.

Ich hielt es aber nicht für rathsam, die Libellation von der Trigonometrie zu trennen, nicht allein deswegen, weil durch sie die Zwischenräume zwischen den Standörtern bestimmt werden, sondern weil sie auch selbst eine gewisse Art ist Höhen zu messen, zu denen man zwar nicht bis an den Fuß, aber doch bis an die äuserste Spitze kommen kann. Weil auch diese Materie nicht blos wegen ihres Nutzens, sondern auch ihres weiten Umfangs wegen abgehandelt zu werden verdient, so werde ich den gegenwärtigen Abschnitt in zwey Abtheilungen theilen, in deren erstern ich die kleine Libellation, die alsdann statt findet, wenn die Entfernungen der Standörter klein sind, abhandeln werde. In der andern werde ich aber von der grössern Libellation reden, die in dem Fall, wo die Zwi-

schen-

schenräume der Standörter groß sind, vorgenommen werden muß.

Erste Abtheilung.

Von der kleinen Libellation.

Von den Instrumenten, oder mancherley Wagen.

§. 204.

Diejenige Libellation nenne ich die kleine, welche da angebracht wird, wo die Weiten zwischen den Standörtern so klein sind, daß der Tangens des Bogens von dem Bogen selbst (oder die Linie der Wage, oder der scheinbare Horizont von der Weite in dem wahren Horizonte selbst) nicht merklich unterschieden ist, welches stets geschieht, wenn die Weite unter 300 Fuß ist. Unten werden wir sehen, daß wenn die Standörter 306 Fuß von einander entfernt sind, man 0,34‴ als Verbesserung anbringen müsse. Hat man kleine Instrumente, zumahl solche, an denen keine Tubi befindlich sind, so kann man kaum bey einer so grossen Weite die Zeichen, welche man an denen Meßstäben befestiget, recht genug unterscheiden, ohne um einige Linien zu fehlen. Wir wollen hier nur blos drey Arten von kleinen Wagen beschreiben, und zwar solche, die vorzüglich bekannt sind, und leicht angeschaft

werden können; doch wollen wir dadurch nicht alle übrigen verworfen haben, wünschen es aber, daß man sich bey kleinen Libellationen mehr derer Instrumente bedienen wolle, die zu grossen Libellationen tauglich, aber doch zu einem Gebrauche im kleinen eingerichtet sind.

§. 205.

AB (Fig. 78.) ist eine von Messingsblech, oder einer andern Materie, welche Wasser halten kann, verfertigte und an den beyden Enden aufwärts gebogene Röhre. Sie stekt in einem Ringe K, der an dem Halse einer durchaus festen Kugel (Nuß) I fest sitzet, welche sich innerhalb der hohlen S nach allen Seiten bewegen läßt, und wenn man die gehörige Richtung erhalten hat, mit der Schraube T befestiget werden kann. Die ganze Maschine ruhet auf dem Fußgestell V V V. Die Länge der Röhre AB ist willkührlich, und gewönlich fast von drey Fuß. In die beyden gebogenen Enden A und B pflegt man hohle gläserne Cylinder DC und FE einzufugen, und verhindert durch Verpichung oder eine andere feste Verküttung der Seiten der Cylinder und der Enden der Röhre A, B, daß gar kein Wasser zwischen ihnen herauslaufen kann. Man gießt hierauf Wasser in die Cylinder, welche durch den Tubum AB Gemeinschaft haben, welches auf beyden Seiten zu einer gleichen Höhe m n nach Art aller flüssigen Dinge, die stets das Gleichgewicht suchen, hinaufsteigt. Durch die

auf diese Art gewönlich zubereitete Wage wird über die Oberfläche des Wassers mn hinweg visiret indem man das Auge in m anlegt. Jedermann wird aber leicht einsehen können, wie leicht man von der Oberfläche des Wassers auf eine merkliche Art abweichen könne, wenn er darauf Acht giebt, wie diese Oberfläche, wenn gleich das Wasser gefärbt ist, doch nicht so ganz leicht durch die Seiten des Glases bemerkt und unterschieden werden könne, weil überall das Wasser nahe am Glase in einer concaven Oberfläche gehoben wird.

Es könnten daher wenigstens auf beyden Seiten an den gläsernen Cylindern Dioptern, wie z. B. Q, mit einem kleinen Loche angebracht werden, und zwar so, daß dieser Diopter Q eine andere R mit einer grössern cirkelförmigen Oefnung, in deren Centro sich kreutzweis gezogene Faden schneiden, entgegengesezt würde, so auch P, welches gleichfals ein kleines Loch zum Durchsehen haben, und für welches ein anderes grösseres O an dem entgegengesezten Cylinder abgepaßt seyn müßte, welches wie die Dioptern R gleichfals Faden hätte. Es könnten sich auch an einer und ebenderselben Diopter, als z. B. O, so wohl eine weite Oefnung mit kreutzweis gezogenen Faden, als auch ein kleines Loch, das der Diopter mit dem Faden entgegenstehet, befinden, wenn man die Diopter P auf gleiche Art doppelt einrichtete.

§. 206.

§. 206.

Die andere Wage ist wie ein jeder Winkelmesser AoBa (Fig. 79.) beschaffen, nur er muß die Dioptern AC und BD haben, von denen die eine AC das kleine cirkelförmige Loch, die andere BD die sich kreuzenden Faden hat. Er muß in einer vertikalen Richtung aufgerichtet werden können, daß ein aus dem Centro o an einem Faden herabgelassenes Bleywurf oP den 90° bey a bezeichnet, denn alsdann hat das Lineal AB die horizontale Richtung, wenn das Instrument nemlich keinen Fehler hat. Man siehet hieraus aber, daß man unzähliche Instrumente zur Libellation brauchen könne, daß auch der halbe Cirkel AaB nicht nothwendig sey, sondern daß es genug sey, wenn ein Lineal durch oa gehet, das mit AB einen rechten Winkel macht und in a ein Zeichen hat, worauf der Faden des Perpendikels fallen muß, damit in o auf beyden Seiten rechte Winkel gemacht werden. Diese Instrumente sind um desto schiklicher zur Libellation, je grösser und je länger besonders das Bleywurf gewesen ist, welches man in Capseln einschliessen kann, damit es nicht von der Luft leicht bewegt werde, und es auch in ein Gefäß mit Wasser fallen läßt, durch dessen etwas starken Widerstand die kreiselnde Bewegung eher gehemmet wird, damit man durch diese Bewegung, wenn man keine Zeit zu verliehren hat, nicht aufgehalten werde. Aber auch dieses hat man alsdann, wenn man vermittelst des Bleywurfs mit der Wage

libellirt,

libellirt, mit vieler Sorgfalt zu beobachten, daß der Faden weder das Lineal AB bey o, wo er aufgehangen wird, oder auch den Punkt a berührt, noch daß er von o und a zu weit abstehet, sondern daran ganz nahe anläuft, so daß er, ohne sich zu reiben, auf beyden Seiten sich frey schwingen kann. Man hängt daher bey grossen Instrumenten den Faden des Bleywurfs, an dessen Ende ein grosser Ring befindlich ist, an der Spitze einer Nadel auf, welche aus dem Centro des Instruments hervorragt, damit nicht eine festere Verbindung mit der Nadel, noch das Anstossen an das Centrum, eine Reibung hervorbringe, welche die freye Bewegung hindern könnte.

§. 207.

Die Wasserwage, wovon ich überhaupt schon im 99. §. geredet habe, scheint mir vor beyden jetzt beschriebenen Wagen den Vorzug zu haben, wenn sie genau gemacht ist. Was aber zu derselben erfodert werde, wenn sie zur Libellation vollkommen tauglich seyn soll, will ich kürzlich anzeigen. **Erstlich.** Sie muß die gehörige Länge haben, und **wenigstens** Einen Fuß lang seyn (Fig. 80.). **Zweytens.** Es müssen die inneren Seiten des gläsernen Tubus sehr geglättet und hell seyn. Um dies zu bewerkstelligen, nimt der D. Chesis (man sehe de la Lande's Astronom. §. 1911.) einen andern gläsernen Cylinder, den er mit einem hohlen kupfernen Cylinder auswendig glättet,

damit

damit er sich in die für die Wage bestimmte Röhre passe; hierauf bestreuet er die äusere Seite mit Schmergel, und bewegt ihn in der Röhre so lange nach beyden Enden hin und her, bis alle Unebenheiten abgerieben sind, und die inwendige Fläche der Röhre zur Politur geschikt ist, welche er völlig zu stande bringt, indem er über die äusere Fläche eines andern Cylinders Papier, das mit Tripel bestreuet ist, auflegt. Man kann leicht sehen, ob dieses alles auf die gehörige Art verrichtet ist, wenn an der Luftblase, die man in der mit Wasser angefüllten Röhre läßt, eine gleichlaufende Bewegung bemerkt wird, so bald das Lineal, worauf die Röhre liegt, eine ein wenig schräge Richtung bekömmt, und dieses nicht sprungweise geschiehet. Drittens. Wenn die gläserne Röhre Einen Fuß lang ist, so muß die Länge der Luftblase IK wenigstens 8 bis 9 Zoll betragen. Denn läßt man die Luftblasen klein, so bewegen sie sich bey der Wärme langsamer, weil sie, indem die Luft durch die Ausdehnung des Wassers stark zusammengepreßt wird, sich an den Seiten der Röhre auf eine merkliche Art reiben, welches bey grossen Luftblasen nicht geschehen kann, wo das Wasser in Rüksicht auf das Fortwelzen der Luftblasen nicht eine so grosse Ausdehnung hat. Viertens. Die meßingene Röhre LEGHFM, die die gläsernen umgiebt und dekkt, muß mit dem einem Ende auf dem metallenen Lineale befestigt, auf dem andern Ende aber vermittelst einer Schraube und untergelegten Feder

auf

auf und nieder geschroben werden können, damit man im Stande seyn könne, die Wage zu untersuchen, wovon wir bald reden werden. Fünftens. Das Lineal muß mit einem schiklichen Fußgestelle, welches wir schon im 205. §. angezeigt haben, verbunden, und mit doppelten Dioptern versehen werden, indem bey A eine weite cirkelförmige Oefnung, in deren Mitte sich feine Faden kreuzweise durchschneiden, angebracht, und ihr gegen über in C auf der andern Seite ein kleines Loch, das gleichfals cirkelrund ist, gemacht wird. Umgekehrt wird so der Fadendiopter in D, das kleine runde Loch B in der erstern entgegengesezt. Der oben angeführte **D. Chesis** hat diese Wagen von der Länge eines Fusses zwar zu einem andern Gebrauch, aber so genau verfertigt, daß sogar die Senkung von einer Sekunde durch die Bewegung der Luftblase in einem Raume von einer Linie angezeigt wird. Diese Genauigkeit kann man kaum von Perpendikeln von mittelmäßiger Länge erhalten. Man sieht hieraus, daß man diese Art von Wagen, wenn sie auf die gehörige Art verfertigt und von bewährter Güte sind, nicht allein statt des Perpendikels bey kleinen Winkelmessern, sondern auch bey etwas grössern Quadranten, wenn man Höhen zu messen hat, sehr füglich gebrauchen könne, da das Wanken der Perpendikel dem Beobachter oft viel Zeit wegnimt.

Von

Von der Untersuchung der Wage.

§. 208.

Sowohl zur Libellation selbst, als auch zur Untersuchung der Wagen, muß man Tafeln zur Hand haben, auf welchen ein gewisses Zeichen befindlich ist, wonach man visirt. Sie können verschiedentlich beschaffen seyn (Fig. 81.), und entweder aus einer schwarzen Tafel mit einem weissen Ringe, der einen schwarzen Cirkel, dessen Diameter etwa Einen Zoll beträgt, umgiebt, bestehen, oder aus einer schwarzen Tafel, auf der sich ein weisses Kreutz befindet, oder sie können auch umgekehrt aus einer weissen Tafel, mit einem schwarzen Ringe oder Kreutze bestehen, wie man an A und B siehet. Das Kreutz sowohl als der mittlere Cirkel muß so breit seyn, daß, indem sie beym Visiren durch die Dioptern von dem Faden geschnitten werden, auf beyden Seiten nur ein weniges über dem Faden hervorzuragen scheint, aus dem Grunde, den ich im 119 §. angeführt habe. Diese Tafeln werde ich in der Folge schlechthin die Zeichen nennen. Man kann hiernächst, damit man sie auf und herabziehen könne, je nachdem es gehen will, mancherley Einrichtungen anbringen. Man kann z. B. an starke Meßstäbe von parallelepipedischer Gestalt AB (Fig. 82.), welche unten aber zugespitzt sind, um sie nach dem Perpendikel in die Erde stechen zu können, bey C und E zwey starke eiserne oder messingene Bänder befestigen, durch welche ein anderer Meßstab FD

durch-

durchgestochen und nach Gefallen mit einer Schraube, welche durch das untere Band E geht, angeschroben werden kann. Der Stab FD, der sein Zeichen bey F hat, wird auf diese Art dasselbe stets erheben und herablassen können, wenn AB festgemacht ist, und man wird nun den Theil GE des Meßstabes AB in Zolle und Linien theilen können, damit man gleich von dem Boden an bis an das Ende D des beweglichen Stabes dieselben zählen könne, worauf man, wenn man die bekannte Zahl des Stabes VF dazu addirt, die Höhe des bey F befestigten Zeichens über dem Boden erhält, oder man muß ein anderes Maaß bey der Hand haben, wonach man GD bestimmt.

§. 209.

Nachdem wir dieses vorher bemerkt haben, so wollen wir Zuerst die Wage mit den beyden gemeinschaftlichen Röhren untersuchen (Fig. 78.). Hat diese keine Dioptern, so kann man sie auch nicht untersuchen, weil das Wasser sich stets genau nach der Linie der Wage richtet, so daß seine Oberfläche bey m und n einerley Entfernung von dem Centro der Erde hat. Der rechte, oder weniger genaue Gebrauch der Wage hänget daher stets von der Geschiklichkeit des Beobachters allein ab. Sind aber Dioptern daran, so muß man diese selbst untersuchen, ob sie fehlerhaft sind, und ihr Fehler etwa darinn bestehet, daß das Loch Q, wodurch man visirt, höher

oder niedriger als der Punkt, wo sich die Faden in der gegenüber stehenden Diopter R durchschneiden, seyn kann; es kann eben dies, oder der umgekehrte Fall bey den Dioptern P und O statt haben, weswegen man sie beyde untersuchen muß. Es wird hinreichend seyn, wenn ich dies für zwey zeigen werde, weil man die andern beyden auf eben die Art besonders untersuchen muß.

Man wähle eine Weite AB (Fig. 83.) nicht grösser und kleiner, als daß man das an dem Stabe BM befestigte Zeichen aus O mit dem blossen Auge sehen kann, folglich etwa von 200, oder 150 Fuß. Man stelle die Wage so, daß die Oberfläche des Wassers genau in beyden Cylindern an beyde Dioptern reicht. Wenn man nun aus dem Punkte O durch Q und R visirt, so muß das Zeichen M in der Höhe BM über dem Boden erscheinen. Man messe nun sowohl die Höhe des Auges oder der Diopter Q sehr sorgfältig, als auch die Höhe des Zeichens BM. Man bringe die Wage aus A nach B, und befestige den Stab mit dem Zeichen in A. Es sey die Höhe des Auges oder eben der Diopter Q, Bo, und wenn man aus o durch Q, R visirt, so erscheine in N das Zeichen in dem Durchschnittspunkte der Faden. Man messe wiederum die Höhen Bo und AN. Ist kein Fehler an den Dioptern, so wird die Summe der Höhen des Auges AO + Bo der Summe der Höhen des Zeichens BM + AN gleich seyn. Denn da

die

die Weite AB der Vorausſetzung nach klein iſt, ſo machen die Perpendikel OA, ingleichen MB, wenn ſie nach den Mittelpunkt der Erde verlängert werden, einen unmerklichen Winkel, und werden, ohne einen Fehler zu begehen, für Parallellinien angenommen werden können. Man ziehe BC mit OM parallel, welches das verlängerte OA in C treffen wird, ſo wird OC = MB ſeyn. Daher wird die Summe der Höhen der Zeichen MB + NA = OC + NA ſeyn, = OA + AC + NA; die Summe der Höhen des Auges wird OA + Bo ſeyn; wenn nun OA + AC + NA = OA + Bo, ſo bleibet, wenn man OA auf beyden Seiten wegnimt, AC + AN = CN = Bo; und wenn CN = Bo, ſo müſſen die geraden Linien No und OM parallel ſeyn, welches aber nicht ſeyn könnte, wenn in den Dioptern ein Fehler ſtatt fände. Nimt man an, daß das Loch Q (Fig. 78.) unter dem Durchſchnittspunkte der Faden R wäre; ſo würde eine durch dieſe Punkte gerade hindurchgehende Linie den Winkel AOM (Fig. 83.) ſtumpf machen, ſo wie auch der Winkel BoN ſtumpf werden würde. Folglich, da OA und BM Parallellinien ſind, ſo würde der Winkel ONo gleichfals ſtumpf, und daher wären die beyden innern bey O und N zwiſchen OM und No auch ſtumpf, und die Linien könnten nicht parallel ſeyn. Wäre aber das Loch Q höher als der Durchſchnittspunkt der Faden R, ſo kann man auf eben dieſe Art zeigen, daß beyde Winkel NOM und ONo ſpitzig

wären. Man siehet also, daß die Dioptern recht stehen; wenn die Summe der Höhen des Auges der Summe der Höhen der Zeichen gleich ist.

§. 210.

Man kann hieraus auch leicht abnehmen, wie man einen Fehler an den Dioptern verbessern könne. Wir wollen zuförderst annehmen, daß wenn die Wage in A (Fig. 83.) steht, das Zeichen nicht in M, sondern in m gesezt werden müsse, wenn es in dem Durchschnittspunkte der Faden erscheinen soll. Man wird, wenn das Instrument nach B gebracht ist, gleichfals das Zeichen in n setzen müssen, in welchem Falle nemlich das Loch Q unter dem Durchschnittspunkt R befindlich ist. Man siehet vors erste, daß dieser Fehler sich zeiget, wenn die Summe der Höhen der Zeichen mB, nA, grösser ist als die erstere Summe MB und NA oder OA + oB (§. 209.) um die geraden Linien Mm + Nn, welche unter sich gleich seyn müssen, da die Weite von O nach M und von o nach N gleich ist, und wenn der Fehler in den Dioptern keine Veränderung leidet, die geraden Linien Om, on von den geraden Linien OM, oN auf einerley Art abweichen. Findet man daher, nachdem man die Höhen der Augen und Zeichen gemessen hat, eine Abweichung von dieser Art, so läßt man das Instrument in B, in eben derselben Höhe Bo stehen, und das Zeichen n um die Hälfte der differirenden Grösse

mM +

$mM + nN$, das ist, um die differirende Grösse nN herab, dann muß es nothwendiger Weise in den wahren Horizont des Auges in o kommen. Man muß hiernächst den Durchschnittspunkt der Faden in der Diopter R gleichfals herablassen, bis er das Zeichen N zu treffen scheint, und man hat alsdann die Verbesserung verrichtet. Wäre der Fehler diesem entgegengesezt, so siehet man schon aus der Figur, daß die Zeichen in μ und ν zu setzen wären, und in diesem Falle würde die Summe der Höhen der Zeichen kleiner seyn als die Summe der Höhen des Auges, und zwar um die Grösse $M\mu + N\nu$, und man müßte, um die Verbesserung anzustellen, nach der Hälfte dieser Summe das Zeichen aus ν nach N erheben.

§. 211.

Anmerkung. Wenn man den Durchschnittspunkt der Faden nicht füglich verbessern könnte, so würde man die halbe Grösse $Mm + Nn$, oder $M\mu + N\nu$ genau messen, und wenn man eine Libellation anstellte, eine Verbesserung anbringen müssen. Denn man kann sehen, daß der Unterschied der geraden Linien OM, Om (oder OM, $O\mu$) zu der Weite der Standörter ein Verhältniß hat. Nehmen wir die Weite $AB = 150'$, $Mm + Nn = 4''$ an, so wird, wenn man bey einer Weite von $200'$ libelliret, das Verhältniß seyn, $150 : 200 = 2'' : 2\frac{2}{3}''$, und

um diese Grösse wird man die Höhe des Zeichens zu vermindern, oder bey entgegengesetztem Fehler zu vergrössern haben, um die wahre Höhe zu erhalten. Man hat übrigens sowohl bey der Libellation selbst, als auch vorzüglich bey der Untersuchung der Instrumente einen festen und harten Boden zu erwählen, der nicht leicht ausweicht, damit nicht, während der Beobachtung selbst, die Instrumente wanken, und die Lage verändern, welches ich einmahl für allemahl zu erinnern nöthig halte.

§. 212.

Folgendes kann eine andere Art, die Wage zu untersuchen, abgeben. Man messe die Weite AB (Fig. 84.), die, wie vorher, von einer solchen Länge ist, daß man von A nach B, wo das Zeichen ausgesezt ist, es deutlich erblikken kann, wenn es von dem Durchschnittspunkte der Diopter mit den Faden in der Mitte durchschnitten wird. Man sezze das Instrument, das untersucht werden soll, so in die Mitte C, daß, wenn AB = 200′ ist, AC = CB = 100′ ist; wenn AB = 150′, AC alsdenn = 75′ ist. Man bringe das Auge in den Punkt O, und visire nach dem Standort A, daß sich das Zeichen in M (oder N) zeige, wende das Instrument um, aber so, daß dadurch die Höhe des Instruments und des Auges O nicht verändert wird, und visire gleichfals nach dem Standort B, daß das Zeichen in m (oder n) erscheine. Hat man dieses

ses gethan, so bringe man das Instrument nach einen von beyden Standörtern, als etwa nach A, nachdem man vorher die Höhe M (oder N) genau gemessen hat, und stelle es so, daß der Ort des Auges in P komme: man nehme nun den Unterschied der Höhen AM (oder AN) und AP, und trage ihn auf dem Meßstabe Bm aus m (oder n) nach p, damit MP = mp (oder NP = np), oder hiernächst P und p über M und m oder darunter komme. Hat man auf diese Art den Punkt p bestimmt, so bringe man das Zeichen aus m oder n dahin, und ändere den Durchschnittspunkt der Faden, daß wenn man das Auge in P anlegt, selbiger das Zeichen p zu durchschneiden scheinet, so wird man Pp als die wahre Linie der Wage haben. Den Grund dieser Untersuchungsart wird man leicht einsehen können. Denn da, es mag der Fehler in den Dioptern beschaffen seyn wie er will, die Winkel COM, COm, oder CON, COn gleich sind, ingleichen auch die Linien OM, Om, wenn man das Instrument gegen A und B kehret und einerley Punkt für das Auge behält; ferner, da ON und On, die sich in gleichen Weiten von dem Punkte O befinden, gleich viel von der wahren Linie der Wage abgehen, so ist augenscheinlich, daß, wenn die Punkte M, m; N, n zusammengezogen werden, Mm und Nn mit der wahren Linie der Wage, die durch O gehet, parallel laufen werden. Weil daher auch MP = mp oder NP = np, und Parallellinien unter sich

sind, so ist nothwendig, daß Pp mit Mm oder Nn paral-lel, und folglich die wahre Linie der Wage für das in P ste-hende Auge sey. Sind daher die Dioptern so gestellt, daß das Zeichen p von den Faden genau geschnitten wird, so stehen sie beyde recht.

§. 213.

Zweytens folgt die Untersuchung des Winkelmessers oder Quadranten. Diese Untersuchung bestehet darinn, daß man das Instrument umkehrt. Denn, wenn man den Winkelmesser (Fig. 79.) einmahl in eine vertikale Lage gebracht hat, wie wir im 206. §. gelehrt haben, so visire man durch die Dioptern C und D, daß der Durchschnitts-punkt der Faden auf ein Zeichen in einer gehörigen Weite, die man messen muß, treffe, und bemerke die Höhe des Zeichens. Darauf drehe man das Instrument um das Lineal AB, daß der Bogen AaB die Lage AbB erhalte, und befestige den aus dem Centro o genommenen Bley-wurf an dem Punkt b, welches derselbe Punkt a ist, durch den in der erstern Lage der Faden des Bleywurfs ging. Man drehe nun den Winkelmesser so um das Centrum o herum, daß der Faden bp durch das Centrum o gehe. Steht das Instrument in dieser neuen Lage, so visire man von neuem durch eben die Dioptern c und d (welche nun schon in Rüksicht auf die Seite, worauf der Bogen be-findlich ist, umgekehrt stehen); bleibt hierbey das Centrum o

in

in derselben Höhe, und scheint das Zeichen wiederum durch die Faden geschnitten zu werden, so befindet sich an den Dioptern kein Fehler. Erscheint es aber höher oder über dem Durchschnittspunkt, so erniedrige man es, damit er dasselbe treffe; das Gegentheil muß geschehen, wenn es unter dem Durchschnittspunkte erscheint. Den Zwischenraum, durch den man das Zeichen von dem erstern Orte rükken mußte, theile man in zwey gleiche Theile, und befestige das Zeichen von neuen in seiner Mitte. Dann visire man entweder in dieser oder der ersten Lage des Instruments nach demselben, und verbessere danach die Höhe des Durchschnittspunkts der Faden, daß er das Zeichen vollkommen genau treffe, so wird man das Instrument in Absicht der Dioptern richtig haben: denn nur hiervon allein reden wir iezt.

§. 214.

Um den Grund der vorgeschriebenen Methode einzusehen, so sey (Fig. 85.) die erste Lage des Instruments EaF, und man erblikke das Zeichen durch die Dioptern E, F in P. Wendet man das Instrument um, und bringet den Punkt a nach b, und es gehet der Faden des Bleywurfs bo durch das Centrum o, und Ea ist = Eb = 90°, so siehet man, daß EFP die wahre Horizontallinie sey, indem sie auf der vertikalen Linie boa perpendikulair stehet. Befänden sich aber die Dioptern A und B nicht auf der

wahren Linie der Wage, sondern es wäre etwa B etwas höher als A, so wird Aa kleiner als ein Quadrant, oder Aoa wird ein spitziger Winkel seyn, und das Zeichen in M gesehen werden. Drehete man nun den halben Cirkel um den Diameter AB, und zwar so, daß die Dioptern in derselben geraden Linie ABM als vorher blieben, so siehet man, daß der Punkt a nach n gebracht werden werde, daß An = Aa sey. Dann könnte aber das aus n gelassene Perpendikel nicht durch das Centrum o gehen. Deswegen müßte, wenn dieses geschehen sollte, die Diopter A aufgehoben werden, daß sie nach C käme, und der Punkt n nach b, dergestalt, daß An = Cb = Aa sey, folglich wird die Diopter B sich alsdann um eben so viel nach D hinab senken. Geschieht dies aber, so wird, wenn man durch C und D visirt, die Gesichtslinie unter dem Horizont des Auges C eben so tief von der Linie der wahren Wage EFP gegen N zu abweichen, als vorher über derselben gegen M geschahe, daß man also alsdann das Zeichen aus M nach N bringen muß, damit es daselbst in dem Durchschnittspunkte der Faden erscheine. Weil nun die Winkel MoP und NoP einander gleich sind, so ergiebt es sich, daß man das Zeichen nach P, folglich in den Mittelpunkt der Weite MN, bringen müsse, damit man die wahre Horizontallinie EFP erhalte, nachdem man danach die Lage der Dioptern verbessert hat.

§. 215.

§. 215.

Was wir oben (§. 206.) von der Weite oP (Fig. 79.), von der Art und Weise das Bleywurf aufzuhängen, von der Art die Höhe der Zeichen auszumessen (§. 208.), von dem festen Stande des Instruments und dergleichen mehr gesagt haben, halten wir iezt nicht mehr für nöthig zu wiederholen, da es auf alle Fälle paßt. Uebrigens empfiehlt sich diese Art der Untersuchung bey grossen Instrumenten sehr, und scheinet die sicherste zu seyn, wenn man z. B. sehen will, ob ein Quadrant genau 90° macht, ingleichen ob ein Tubus gehörig gestellt ist, daß seine Axe durch das Centrum und den Anfang des Bogens, wo die Abtheilung anfängt, gehet u. s. m. Es hat aber auch dieser Fehler, wenn man ihn durch diese Untersuchung gefunden hat, das mit jenem gemein, daß, wenn er sich an dem Instrumente nicht leicht verbessern liesse, seine Grösse doch zur Libellation mit der Weite in Proportion steht.

Ferner läßt sich leicht einsehen, daß die andere Art der Untersuchung (§. 212.) auch auf den Winkelmesser oder den Quadranten angewendet werden könne. Denn auch durch die fehlerhaften Dioptern A, B (Fig. 85.) werden in den Standörtern A, B (Fig. 84.) zwey Punkte M, m bestimmt, die sich auf einer Linie befinden, welche mit der wahren Horizontlinie völlig parallel geht. Sezt man daher den Winkelmesser in A und die Okulardiopter in P, und trägt den Zwischenraum MP nach mp, so wird man

den

den Punkt p erhalten, in welchen das Zeichen des Standorts B zu seßen ist, damit man den Fehler der Dioptern verbessern könne; doch glaube ich, daß die Umkehrung des Instruments noch sicherer sey.

§. 216.

Drittens folgt die Untersuchung der Wasserwage. Mit dieser muß man eine doppelte Untersuchung anstellen. Die eine geht auf die Entdekkung und Verbesserung des Fehlers in den Dioptern, welche ganz wie jene Verbesserung der Dioptern an den gemeinschaftlichen Röhren vorgenommen wird, die wir oben auseinander gesezt haben, und daher nicht wiederholen; die andere betrift die Wage selbst, welche an dem einem Ende beweglich seyn muß, damit man sie verbessern und stets prüfen könne, wenn etwa ein Zweifel ihrer Richtigkeit wegen entsteht, ja sie kann an beyden Enden beweglich seyn, welches man auf diese Art erhalten kann. Es enthalte A (Fig. 86.) das Ende des meßingenen Tubus, in welchem der gläserne steckt. Sein Ende A endige sich in dem kleinen Arm mn, welcher durch die Oefnung des Behältnisses MN, welches auf dem Lineale BF, worauf die Röhre liegt, angelöthet ist, auf der Seite, wo das Behältniß gegen die Röhre zugekehrt ist, in dasselbe eingelassen werden kann. Durch das obere Blech des Behältnisses MN, in welchem sich um die Mitte or eine Schraubenmutter befindet,

läßt

läßt man eine Schraube Cd durchgehen, welche mit ihrem Ende d den kleinen Arm der Röhre mn herunter drükt, wenn man die Schraube hinein drehet; auf dem Boden des Behältnisses befestige man bey q eine starke Feder ap, die eben diesen kleinen Arm stets wider die Schraube hinauftreibt und ihn unbeweglich erhält. Der andere Theil der Röhre (den ich auf der Figur nicht vorzustellen brauche) hat einen gleichen, in eben einem solchen Behältnisse befindlichen, kleinen Arm; aber mit dem Unterschiede, daß derselbe durch die Schraube nicht an eine Feder gedrükt, sondern an eine darunter liegende Unterlage angeschroben wird, diese ist ausgehöhlt, damit der Arm sich nicht seitwärts drehen kann, und hält das Ende der Röhre fest und unbeweglich, da sie dem Drukke der Schraube nicht ausweichen kann. Aus dieser oder jeder andern ähnlichen Einrichtung kann man sehen, daß wenn die Schraube an dem einen Ende ein wenig aufgeschroben wird, das Ende der Röhre A auf und niedergelassen werden könne, je nachdem man es nöthig hat, denn ich setze voraus, daß gröbere Fehler, deren Verbesserung eine grössere Bewegung der Röhre nöthig macht, bey der Verfertigung des Instruments vermieden werden.

§. 217.

Der Fehler, welcher an der Wasserwage befindlich seyn kann, ist nur der einzige, daß die obere innere Seite

der

der gläsernen Röhre, welche (Fig. 87.) durch die gerade Linie EF vorgestellt wird, nicht horizontal geschliffen ist, denn die untere Seite kann ohne einen Nachtheil für die Wage schief seyn, weil das in der Röhre enthaltene Wasser, das schwerer als die Luft ist, sich stets herunterſenkt, und die leichtere Luft gegen den oberen Theil drükt. Hieraus folgt nun, daß die Luftblase GH, so bald die Seite EF von der Horizontallinie ein wenig abweicht, bis nach dem äuſersten Punkt E hinaufſteigen müſſe, wenn nemlich gar keine Reibung statt fände. Weil dieſe aber die freye Bewegung stets etwas hemmet, so wird die Luftblase nicht ganz an den äuſersten Punkt E hinaufſteigen, es müßte denn die Seite EF so stark aus der horizontalen Lage gebracht werden, daß die Reibung durch den zu starken Druk des Wassers gehoben würde. Ist aber die Seite EF horizontal, und die Wage hat keinen Fehler, so wird die Luftblase aus der Mitte der Röhre nicht gebracht werden können, wenn sie horizontal liegt, da das Streben des Wassers herabzusteigen überall gleich ist, und die Kräfte, die die Luftblase forttreiben, im Gleichgewichte stehen. Aus diesem Streben des Wassers und der Luft lassen sich diese zwey Stükke deutlich folgern, worauf die Untersuchung der Wage sich als auf einem sichern Grunde stüzzet. Erstlich, wenn die Wage CDEF fehlerhaft ist, und auf einer völlig horizontalen Fläche AB ruhet, und man legt sie, nachdem man auf derſelben die Punkte C, D

bemerkt

bemerkt hat, herum, daß die äuſersten Enden der Wage eine entgegengeſezte Lage bekommen, indem man F nach f, und E nach e bringt, ſo wird die Luftblaſe, welche in der erſten Lage nach dem äuſerſten Endpunkt E hin, bis auf die Weite EG ſtieg, in der andern Lage nach e hin ſteigen, ſo daß die Weite EG = eg iſt. Denn man ſezt voraus, daß die Seite der Röhre innwendig keine Unebenheiten hat, ſondern durchaus gleich polirt iſt. Es befinden ſich die Punkte E, e auch in gleicher Höhe über dem wahren Horizont AB. Zweytens, wenn die Wage richtig iſt, und auf einer Fläche IB (Fig. 88.) ruhet, welche nach einer Linie liegt, die mit dem wahren Horizonte AB einen kleinen Winkel IBA macht, ſo wird die Luftblaſe GH nach E zu ſteigen, und wendet man ſie um, daß das Ende F nach f, E nach e kommt, ſo wird die Luftblaſe auf eben den Ort gh kommen. Denn der Unterſchied der Höhen FD und CE rührt bey dieſer Vorausſetzung allein von der ſchiefen Richtung der Fläche IB her, daher ſich einerley Erfolg beym Waſſer und der Luft äuſern muß.

§. 218.

Es würde etwas leichtes ſeyn, eine fehlerhafte Waſſerwage zu verbeſſern, wenn man von der Fläche AB (Fig. 87.) mit Gewißheit wüßte, daß ſie mit dem Horizont keinen Winkel machte. Denn brächte man ſie auf eine ſolche Fläche, ſo dürfte man nichts thun, als die

Schraube

Schraube an dem einem Ende etwas aufzuschrauben, um die Schraube C an dem andern Ende A (Fig. 86.) entweder nieder oder aufzuschrauben, bis die Luftblase in gleicher Weite von beyden Enden der Röhre abstünde, und darauf, wenn man vorher die andere Schraube fest angeschroben hätte, bey I und K bleibende Zeichen in das Glas einzuschneiden (Fig. 80.).

Man kann es aber nicht wohl voraussetzen, daß die Fläche AB vollkommen horizontal sey. Man nehme daher an, daß die fehlerhafte Wage EF auf der nach einem Winkel liegenden Fläche IB ruhe. Es sey auch die Seite EF entweder in eben solcher Richtung als IB, oder in der entgegengesetzten, und zwar in gleichem Maasse, oder mehr oder weniger.

Wir wollen zuerst annehmen, die Seite EF (Fig. 88.) habe mit der Fläche IB einerley Richtung, so wird die Luftblase gegen E höher steigen, z. B. in GH, als wenn das Instrument umgelegt wird, und F nach f kömmt, weil, da in der ersten Lage eine doppelte Abweichung von dem wahren Horizonte zusammenkömmt, in der andern aber sie sich entgegengesezt ist, bloß der Unterschied der Abweichungen bleibt. Ist nun die Abweichung der Seite der Röhre grösser als die Abweichung der Fläche IB, so wird die Luftblase sich nach e hin bewegen; ist sie kleiner, so wird sie nach f gehen, z. B. auf die Weite fL; ist die

Abwei-

Abweichung auf beyden Seiten gleich, so wird sie in der Mitte bleiben. Dies kann man leicht einsehen, da die Bewegung der Luftblase sich nach dem Unterschiede der Abweichung von dem wahren Horizonte richtet. Diese macht es, daß in dem ersten Falle e höher als f, im andern f höher als e ist, aber nicht so hoch als E in der ersten Lage der Wage gewesen war. In dem dritten Falle ist kein Unterschied der Höhe da. Um nun dem Fehler der Wage abzuhelfen, muß man, wie man leicht sehen kann, bey der Bewegung der Luftblase für die Abweichung der Flä-che nur die gehörige Wirkung merken. Dieses erhält man aber, wenn man die Weiten der Luftblase von den Enden EG, fL genau anmerkt, in der zweyten Lage der Wage f aufhebt (oder e niederläßt, welches einerley ist) und dadurch die Luftblase aus LM, oder aus der Mitte oder vom Ende e zu einer Weite von dem Ende f bringt, die der Weite, die zwischen EG, die sie in der ersten Lage der Wage hatte, und zwischen der andern fL, die sie bey der andern Lage der Wage hatte, die Mitte hält, gleich ist. Geschiehet nemlich dieses, so wird das eine niedrige Ende F der Seite EF um so viel aufgehoben, als vorher das Ende E zu hoch war; es findet daher der zweyte Fall des vorigen §. statt, die Wage ist verbessert, und es wird die Weite der Luftblase von der Mitte blos von der Abweichung der Flä-che IB abhangen.

Nimt man zweytens an, daß die Abweichung der Seite EF bey der ersten Lage der Wage der Abweichung der Fläche IB entgegen stehe, so wird die Luftblase dahin gehen, wo unter den Abweichungen die größte ist; kehrt man aber die Wage um, so wird sie beyden Abweichungen folgen. Deswegen hat man die Luftblase hier wiederum in die Mitte zwischen den beobachteten Weiten zu bringen, wie bey der vorigen Voraussetzung. Dieses ist aber noch nicht genug. Wäre selbst bey der Verbesserung ein Fehler begangen, so wird derselbe entdekt werden, wenn man die Wage von neuem umkehrt, und die Luftblase dabey in beyden Stellungen der Wage nicht dieselbe Entfernung von den Enden behält. Man muß daher so lange ab oder zusetzen, bis, wie man auch die Wage drehet, die Weite der Luftblase von den Enden genau dieselbe bleibt, als sie nach unserm zweyten Falle seyn muß, wenn die Seite EF der Fläche IB parallel gewesen wäre, worauf die Wage liegt, daß also das Aufsteigen der Luftblase nur ihrer Abweichung vom Horizonte, nicht der Abweichung der Seite EF zugeschrieben werden kann.

§. 219.

Der Anfänger merke, daß wir bisher angenommen haben, daß die Röhre der Wage auf der Fläche eines Lineals ruhe, wie wir es in der 80. Figur vorgestellt haben. Dieses ist aber nicht nothwendig: es können die Enden des

Lineals

Lineals auch herumgebogen werden, damit sie die Stelle der Füsse des Instruments mit vertreten. Dieses macht in manchen Fällen den Gebrauch der Wage bequemer, zumahl wenn jene gebogene Theile etwas ausgehöhlt werden, und sich zu der Aussenseite der Röhren, deren Axen man zu untersuchen hat, passen. Hat man überdies ein Meßlineal, wie wir in der 38. Figur gezeigt haben, so wird man es mit der Wasserwage, indem man sie auf seine Fläche FCE setzet, verbinden können; aber es muß dann die Fadendiopter noch einen Kreutzfaden haben, und die lange Ritze, wodurch man siehet, muß bis auf ein kleines Loch zugemacht werden, das man in eben der Höhe über dem Lineale läßt, als die Höhe des Querfadens in der andern Diopter ist, welches man durch die oben auseinander gesezte Prüfung untersuchen kann.

Von dem Abwägen der Horizontallinie, oder dem Libelliren selbst.

§. 220.

Bey der kleinen Libellation hat man vor allen sorgfältig dafür zu sorgen, daß die Meßstäbe, woran die Zeichen, nach welchen man visirt, befestigt werden, stets nach der Perpendikulairlinie vermittelst des Bleywurfs eingestochen werden. Geschieht dies, und gebraucht man genaue Libellen, so wird man das ganze übrige Verfahren aus folgenden Aufgaben leicht wahrnehmen können.

§. 221.

Erste Aufgabe. Die Höhe der Oerter C und E (Fig. 89.) zu libelliren.

Auflösung. Die Höhe gewisser bestimmter Oerter zu libelliren ist nichts anders, als die Höhe eines Orts über dem andern zu finden, wozu (wenn sonst nichts verlangt wird) es nicht nöthig ist, ihre Weite zu wissen. In dieser Aufgabe besteht die **einfache Libellation.**

Man wähle fast in der Mitte von C und E den Standort D, worinn die Wage R gehörig aufgestellt wird. Man steche in C und E Meßstangen ein, an welchen sich Zeichen (§. 208.) befinden, und visire nun gegen beyde, indem die Gehülfen die Zeichen auf gegebene Winke hinaufziehen oder herablassen, bis beyde P und Q sich in dem Durchschnittspunkte der Faden zeigen. Man mißt darauf genau die Höhe eines jeden Zeichens CP und EQ. Ihr Unterschied giebt die Höhe des Ortes C über dem Ort E, die man suchte. Denn zieht man aus E eine Linie EG, die mit der geraden Linie, welche die Punkte P, Q verbindet, parallel läuft, hiernächst eine andere mit ihr parallel gehende CV, so zeigt sich, daß $CG = VE$, und $PG = EQ$; folglich auch $CP = VQ$; es ist aber $VE = EQ - VQ = EQ - CP = CG$, weil man wegen der geringen Entfernung der Oerter CP und EQ für Parallellinien halten muß, daß daher die Linie der

Wage

Wage des Auges vom wahren Horizonte nicht unterschieden seyn kann.

§. 222.

Aus dem 219. §. siehet man leicht, daß wenn beym Instrumente R gar kein Fehler statt findet, es nicht einmahl nöthig sey, daß dasselbe sich mit den Oertern C und E auf einer geraden Linie befindet, oder daß man die Weiten CD und DE wisse. Ist das Instrument aber fehlerhaft, so muß man entweder die Weite des Standorts D von den Grentzen wissen, damit die Verbesserung für eine jede der beyden Höhen angestellt werden könne (Siehe 211. §.), oder es müssen auch diese Weiten einander gleich seyn, da die Fehler der Höhen mit den Weiten im Verhältniß stehen. Nimt man diese für gleich an, so sind die Fehler selbst gleich, und können bey der Differenz keinen Unterschied hervorbringen. Nimt man übrigens das Instrument als fehlerfrey an, so kann darüber ein Zweifel entstehen, ob man akkurat genug visirt habe, indem man z. B. etwa die Zeichen nicht deutlich genug sehen konnte, und deswegen wird man eine umgekehrte Libellation anstellen können. Wenn man nemlich (Fig. 83.) die Oerter A und B libelliren sollte; so setze man die Wage zuerst in A, das Auge befinde sich in O, und in M über dem Ort B befinde sich das Zeichen. Man nehme die Differenz der Höhen des Auges AO und des Zeichens BM, welche DB = AC seyn wird. Man bringe hierauf

die Wage aus o nach B, und visire nach N, und vergleiche die wiederum erhaltene Differenz Bo — AN mit der erstern, so muß, wenn kein Fehler begangen ist, dieselbige Höhe, nemlich DB, herauskommen. Weicht aber die erste und andere Differenz voneinander ab, z. B. es wäre die erste = 3′7″5‴, die andere 3′6″10‴, so addire man sie, daß sie = 7′2″3‴ werden, welche Summe, durch 2 dividirt, die fast wahre Höhe AC zu 3′6″1,5‴ angeben wird.

§. 223.

Ueberhaupt pflegen noch folgende gute Erinnerungen von Sachkundigen für das Libelliren gegeben zu werden. Erstlich, daß, so viel man kann, die Wage einen solchen Stand erhalte, daß in der Fadendiopter der Querfaden mit dem Horizonte so viel als möglich parallel gehe, der andere vertikal, wie HR, VE in der 91. Figur. Zweytens, daß der Beobachter mit seinen Gehülfen, welche die Zeichen an den Stäben auf und nieder lassen müssen, vorher wegen gewisser mit der Hand oder Huthe, u. d. gl. andern Dingen zu gebenden willkührlichen Zeichen übereinkomme, um daraus leicht abnehmen zu können, was zu thun sey, zumahl wenn die Weiten etwas groß sind, daß die Stimme nicht vernehmlich, oder gar nicht gehöret werden kann, man müßte denn aus vollem Halse schreyen, welches sehr lästig seyn müßte. Drittens,

tens, daß der Gehülfe, wenn er nach vollbrachter Beobachtung den Stab mit dem daran befindlichen Zeichen nach einem andern Ort bringen soll, er ihn, ehe er ihn von seinem Orte wegnimt, auf beyde Seiten, nach der rechten und linken des Beobachters, merklich hin und her zieht, indem jener unterdessen durch die Dioptern siehet. Denn hätte es sich etwan zugetragen, daß der Gehülfe unachtsamer Weise dem Stabe eine schiefe Richtung IC (Fig. 91.) statt der perpendikulairen gegeben hätte, und der in C stehende Stab mit seinem andern Ende bey einer solchen Bewegung nach der rechten und linken Seite den Cirkelbogen ab beschriebe, so wird das Zeichen, welches während der Beobachtung in dem Durchschnittspunkte I erschien, sich irgendwo über dem horizontalen Faden HR zu erheben scheinen müssen, als z. B. in b. Hat ID aber eine genaue vertikale Lage gahabt, so wird sein äuserster Punkt I einen Bogen beschreiben, der den Faden HR in I berühret, auf beyden Seiten aber unter ihm ist.

§. 224.

Zweyte Aufgabe. Die Oerter A und E (Fig. 89.), deren Weite grösser ist, als daß man durch die einfache Libellation den Unterschied der Höhen finden könnte, zu libelliren.

Auflösung. Man befestige in A und C die Zeichen, und sezze um ihre Mitte die Wage O, wie bey der einfa-

chen Libellation, messe darauf die Höhen der Zeichen AM und CN genau, und schreibe die Höhe AM auf die eine, CN auf die andere Seite des Papiers oder der Tafel. Man lasse darauf das Zeichen in C, und bringe das andere aus A nach E, setze die Wage um die Mitte D, und visire aus R nach P und Q, indem man das Zeichen unter N niederläßt, wenn es nöthig ist. Hierauf werden die Höhen CP und EQ wieder auf die Tafel, und zwar so getragen, daß alle, die nach dem Ort A sehen, in einer und eben derselben Reihe eine unter der andern gesezt werden, welche aber nach dem andern Ort E hin beobachtet sind, sich in ihrer gehörigen Ordnung auf der andern Reihe, wo CN angemerkt ist, befinden. Man sezt diese Arbeit bis an den Ort E fort. Darauf sammlet man alle Höhen, welche während des Beobachtens nach dem Ort A hin lagen, in eine Summe, so wie auch die nach E hin lagen, und deswegen besonders aufgezeichnet wurden. Zieht man die kleine Sumine von der grössern ab, so hat man den Unterschied der Höhen, den man suchte. Der Grund ist leicht einzusehen. Denn es kommt hierbey darauf an, ob $TE = AF$ sey, wenn man FE und AT und CV als Horizontallinien ansieht, welche von den Linien der Wage des Auges bey kleinen Weiten nicht unterschieden sind. Nimt man nun $NC - MA$, so wird man $SC = TV$ erhalten, und nimt man $EQ - CP$, so erhält man VE, folglich, wird AM von NC, und CP von QE

abge=

abgezogen, so erhält man TV + VE = AF. Man siehet aber deutlich, daß sich einerley Unterschied ergebe, wenn man entweder AM von CN, und CP von EQ wegnimt, oder die Summe AM + CP von der Summe CN + EQ, daher jenes gelehrte Verfahren die wahre Höhe AF des Ortes AM über dem Ort EQ giebt.

§. 225.

Anmerkung. Es kann sich zutragen, daß eine oder mehrere Höhen, als AN (Fig. 90.), die beym Beobachten nach A hingekehrt sind, grösser als die sind, die dem Beobachter gegen E zu liegen, und mit jenen von gleicher Art sind. Aber dieses thut nichts in Absicht der Ordnung des Aufzeichnens der Grössen. Denn die Höhe des höchsten Standorts C, Ca = KY wird nicht gesucht, sondern AZ = MY, welche man in der That erhält, nicht durch Abziehn der Linie CP von AN, sondern AN von CP, wodurch man die negative Differenz AG erhält, welche, wenn man sie von der Summe abzieht, die Grösse KY um den Theil KM = AG verbessert.

§. 226.

Oft erforscht man auch durch die Libellation den Abfall eines Flußbettes, dessen Ufer die Linie mpqrn bezeichnen soll; das Ufer wird aber bey beyden Grenzörtern von ungleicher Höhe Am, Yn seyn können. Hat man hier

die Libellation zu stande gebracht, so wird in diesem Falle noch die Höhe des Ufers Am und Yn zu messen seyn, und die Differenz zwischen beyden, wenn man sie von My abzöge (oder, fals Am < als Yn wäre, hinzuthäte), würde in diesem Falle der gesuchte Abfall seyn, da wir für die erste Aufgabe ZY als horizontal angenommen haben. Es ist auch nicht nöthig, Anfänger zu erinnern, daß es gleich viel sey, ob die Libellation von A nach Y zu, oder von Y nach A hinauf, vorgenommen werde. Ist das Vornehmen von Wichtigkeit, so kann man sie wechselsweise vornehmen, den Unterschied theilen, und eine Mittelzahl zum Gebrauch annehmen.

Zweyte Abtheilung.

Von der grössern Libellation.

§. 227.

Die grössere Libellation theile ich in die einfache, die aus einem Standorte verrichtet werden kann, und in die zusammengesezte ein, die man aus mehrern Standörtern vornimt, wenn nemlich die Zwischenräume so groß sind, daß die Linien der Wage (wie wir im 202. §. gezeigt haben) schon merklich von den Bogen abweichen, deren Tangenten sie sind, und der Punkt, wonach visirt wird, ausser dem wahren Horizont des Auges gelegen ist. Hierzu muß man die Elevationen über dem Horizont der

Stand=

Standörter, nach welchen man visirt, wissen, wenn man die Weiten weiß, das heißt, man muß, wenn der Bogen gegeben ist, den zwischen dem Tangenten und Bogen befindlichen Theil des Sekanten wissen. Als Pikard auf Befehl des Königs von Frankreich grosse Striche der Erde libelliren mußte, so berechnete er diese Elevationen von einem Bogen, der 50 parisische Klafter enthält, an, bis auf einen Bogen, der 4000 Klafter in sich faßt, und theilte diese Berechnung in dem Tractat von der Libellation, den de la Hire im Jahr 1728. französisch herausgab, mit. Die Methode seiner Rechnung thut zwar der geometrischen Strenge kein Genüge, ist aber für den Gebrauch hinlänglich genug. Dies ist der Grundsatz, worauf sich seine Rechnung stüzt. Es sey (Fig. 92.) AC der Radius der Erde, AB ein kleiner Bogen (denn wenn AB = 4118 wienerische Klafter ist, so beträgt er noch nicht ganz 4',09), AD der Tangens, welcher ohne einen Fehler zu begehen für AB angenommen werden kann (indem bey eben dieser Voraussetzung, daß AB = 4118 Klafter sey, BD = 15 Fuß ist); man nehme also einen andern Tangens bey B, der den ersten in E schneidet, so wird, wie aus der Geometrie bekannt ist, AE = EB, und die Triangel ACD und BED einander ähnlich seyn, folglich AC : AD = EB : BD. Da nun der Winkel DEB dem Winkel ACD gleich ist, und hier

nur

nur wenige Minuten beträgt, so siehet man, daß wenn auch die größte Weite berechnet wird, in dem rechtwinklichten Triangel DEB der Sinus EB vom Sinus totus ED kaum unterschieden sey, und EB, ohne die Gefahr einen merklichen Fehler zu begehen, = ED genommen werden könne, folglich, da EB = AE, auch AD = 2EB sey. Nimt man dies an, so verdoppele man die forderſten Ausdrükke in der ersten Gleichung AC : AD = EB : BD, so wird sie heissen 2AC : AD = AD : BD, und daher

$$BD = \frac{AD^2}{2AC} = \frac{AB^2}{2AC}.$$

§. 228.

Erster Zusatz. Es verhalten sich die Weiten der Linien der Wage vom wahren Horizonte unter einander, wie die Quadrate der Weiten vom Auge des Beobachters.

Denn in derselben Figur ist $Hi = \frac{Ai^2}{2AC}$, und $Lm = \frac{Am^2}{2AC}$, in welchem Ausdrukke 2AC, oder der Diameter der Erde eine beständige Grösse ist, die das Verhältniß nicht verändert.

§. 229.

Zweyter Zusatz. Wenn das Instrument einen Fehler hat, daß die Winkel CAD und CAG keine rechte Winkel sind, so werden, wenn die Weiten AB und AE

gleich

gleich sind, demohnerachtet doch die Punkte D und G auf einerley Linie der Wage oder BD = FG seyn (doch nicht auf der durch das Auge gehenden Linie der Wage), und man wird durch ein solches Instrument den wahren Unterschied der Standörter F und B finden können.

§. 230.

Dritter Zusatz. Macht das fehlerhafte Instrument den Winkel CAG spitzig, als CAo, so erniedrigt es die Objekte bey kleinen Weiten, als Ai, unter den wahren Horizont des Auges in K, indem Ao den Bogen AF schneidet; aber bey grössern Weiten erscheinen die Objekte über dem wahren Horizont des Auges, als der Punkt o selbst. Ist der Fehler bekannt, so kann man den Punkt m aus der Tafel der Elevationen, die wir hier beyfügen werden, finden, oder die Weite Am, in welcher das Instrument das in dem wahren Horizont des Auges gesehene Objekt enthält. Wir wollen Am = x nennen, und der Fehler des Instruments soll so groß seyn, daß er in einer Weite von 100 Klafter das Objekt um die Grösse a erniedrigt, diese Weite soll D heissen. Es frägt sich, welches die Elevation der Wage über dem wahren Horizont für die Weite D ist, welche = b seyn soll. Weil der Fehler des Instruments mit der Weite im Verhältnisse stehet, so wird folgende Gleichung statt finden. a : D = Lm : x, und weil sich die Elevationen der

Wage

Wage (Erst. Zus.) unter einander verhalten, wie die Quadrate der Weiten, so wird gleichfals $D^2 : b = x^2 : Lm$; und in zusammengesezten Verhältnissen $a \times D : b = x : 1$, oder $a \times D = bx$; daher $b : D = a : x$, das ist, die gehörige Elevation der Wage für die Weite D, verhält sich zu dieser Weite, wie der Fehler des Instruments in eben dieser Weite D zur gesuchten Weite. Wenn man zum Beyspiel wüßte, daß das Instrument das Objekt in einer Weite von 309 Klaftern um 3″ erniedrigte, so kömmt dieser Weite in der Tafel die Elevation von 1″ 0,36‴ zu. D wird 309 seyn, $a = 3''$, $b = 12{,}36'''$, folglich verhalten sich 12,36‴ : 309 Klaft. = 36‴ : $x = 1061{,}8$. Dieser Weite kömmt in den Tafeln mehr als 11″ 6,8‴ zu. Da aber dem Fehler zu folge nur 10″ 3,7‴ zukommen sollten, so dient dies zum Beweise, daß diese ganze Rechnung nichts als eine blosse Näherung sey, welches indessen nichts zur Sache thut, weil diese Aufgabe weiter auf die Genauigkeit der Libellation keinen Einfluß hat.

§. 231.

Wir wollten hier Pikard's Tafel von den Elevationen der Wage über dem wahren Horizont des Auges herseßen; weil aber Pikard den Radius der Erdkugel zu 3269297 parisische Klafter seßt, wir ihn oben (§. 170.)

aber

aber auf 3273000 solche Klafter geschäzt haben, so mußten wir nothwendig eine Aenderung machen. Denn wenn beym Pikard der Radius CP, bey uns CQ ist, bey ihm der Bogen PR = 300 Klafter ist, so muß bey uns QS dafür gesezt werden, der sich so zu PR verhält, wie CQ zu PC. Hieraus folgt auch, daß die Elevationen des Pikard RT sich zu den unsrigen SV in gleichen Weiten, nach gleichem Verhältnisse der Radiorum CP zu CQ verhalten. Hiernächst hätte das parisische Maaß auf wienerisches reducirt werden müssen. Endlich läßt die Pikard'sche Tafel, die bis auf 4000 Klafter geht, sehr grosse Zwischenräume, für welche durch eine nicht einfache Rechnung die gehörigen Elevationen gefunden werden. Ich hielt daher die Tafel, die ich jezt beyfüge, und welche bis auf 2000 Klafter gehet, zum Gebrauche für bequemer. Ich habe aber für die angenommenen Elevationen (welche im Anfange nur eine halbe Linie steigen) die Weiten berechnet, damit ein jeder alsobald sehen könne, wie viel er fehlen könne, wenn er die Verbesserung unterläßt. Von 300 Klaftern an habe ich die Elevationen immer um 1 Linie bis zu 500 Klafter wachsen lassen, darauf bis 600 um 2 Linien, von da bis 750 Klafter um 3 Linien, dann bis zu 1060 Klafter um

einen

einen halben Zoll, nachher habe ich die Vergrösserung bis zu der Weite von 1500 Klaftern um ganze Zolle steigen lassen, endlich bis auf 2120 Klafter um einen halben Fuß. Auch die am Centro zu den Weiten gehörigen Winkel habe ich hinzugefügt, hiernächst die Strahlenbrechung und die ihr zukommende Verbesserung, die ich stets durch die Gleichung gesucht habe, wie der Radius, der auf Sekunden reducirt ist, sich zum Winkel der Refraktion verhält, so verhält sich die Weite zur Grösse des Raums in linien und Zehntheilen von ihnen, um welchen das Objekt höher, als es ist, gehoben wird. Diese Tafel enthält mehr als die Tafel des Pikard, ob sie sich gleich nicht auf so grosse Weiten, als die seinige erstrekt, weil ich glaube, daß es sich kaum zutragen wird, daß man Weiten über 1000 Klafter nehmen sollte. Deswegen habe ich für grössere Weiten auch grössere Zwischenräume gelassen, da sie seltner vorkommen.

Weite nach wienerischen Klaftern, auf deren jegliches 6 wienerische Fuß gehen.	Elevation.	Winkel am Centro.	Winkel der Strahlenbrechung.	Verbesserte Strahlenbrechung.
62,39 Klaft.	$\frac{1}{2}$ Lin.	3″,826	0″,4252	0,11112 Lin.
88,24	1	5 ,408	0 ,6014	0,2222
108,1	$1\frac{1}{2}$	6 ,628	0 ,7364	0,3334
124,8	2	7 ,652	0 ,8504	0,4444
139,5	$2\frac{1}{2}$	8 ,556	0 ,9506	0,5556
152,8	3	9 ,372	1 ,0414	0,6666
165,1	$3\frac{1}{2}$	10 ,122	1 ,1248	0,7778
176,5	4	10 ,822	1 ,2024	0,8890
187,1	$4\frac{1}{2}$	11 ,478	1 ,2754	1,0000
197,3	5	12 ,100	1 ,3444	1,1112
207,0	$5\frac{1}{2}$	12 ,690	1 ,4100	1,2222
216,1	6	13 ,254	1 ,4728	1,3334
225,0	$6\frac{1}{2}$	13 ,796	1 ,5328	1,4444
230,8	7	14 ,154	1 ,5726	1,5202
241,7	$7\frac{1}{2}$	14 ,820	1 ,6466	1,6666
249,6	8	15 ,306	1 ,7006	1,7778
257,3	$8\frac{1}{2}$	15 ,776	1 ,7528	1,8888
264,7	9	16 ,234	1 ,8038	2,0000
272,0	$9\frac{1}{2}$	16 ,678	1 ,8532	2, 112
279,0	10	17 ,112	1 ,9012	2, 222
285,9	$10\frac{1}{2}$	17 ,534	1 ,9482	2, 334
292,6	11	18 ,000	2 , 000	2, 452
299,2	$11\frac{1}{2}$	18 ,350	2 , 038	2, 556

Weite nach wienerischen Klaftern, auf deren jegliches 6 wienerische Fuß gehen.	Elevation.	Winkel am Centro.	Winkel der Strahlenbrechung.	Verbesserte Strahlenbrechung.
305,7 Klafter.	1 Zoll 0 Lin.	18″,744	2″, 082	2,666 Lin.
318,1	1 Z. 1 Lin.	19 ,510	2 , 224	2,890
330,2	1. 2	20 , 24	2 , 250	3,110
341,7	1. 3	20 , 96	2 , 328	3,334
353,0	1. 4	21 , 64	2 , 404	3,556
363,8	1. 5	22 , 32	2 , 480	3,778
374,3	1. 6	22 , 96	2 , 550	4,000
384,6	1. 7	23 , 58	2 , 620	4,222
394,6	1. 8	24 , 20	2 , 690	4,444
404,3	1. 9	24 , 80	2 , 756	4,666
413,9	1. 10	25 , 38	2 , 820	4,888
423,2	1. 11	25 , 96	2 , 884	5,112
432,3	2. 0	26 , 50	2 , 946	5,332
441,2	2. 1	27 , 06	3 , 006	5,556
449,9	2. 2	27 , 60	3 , 088	5,778
458,5	2. 3	28 , 12	3 , 124	6,000
466,9	2. 4	28 , 64	3 , 182	6,222
475,2	2. 5	29 , 14	3 , 238	6,444
483,3	2. 6	29 , 64	3 , 294	6,666
491,3	2. 7	30 , 12	3 , 348	6,888
499,2	2. 8	30 , 62	3 , 400	7,112
509,9	2. 9	31 , 08	3 , 454	7,334
514,5	2. 10	31 , 56	3 , 506	7,556

Weite nach wienerischen Klaftern, auf deren jegliches 6 wienerische Fuß gehen.	Elevation.	Winkel am Centro.	Winkel der Strahlenbrechung.	Verbesserte Strahlenbrechung.
522,0 Kl.	2 Z. 11 Lin.	32″,00	3″,550	7,778 Lin.
529,5	3. 0	32 ,46	3 ,608	8,000
543,9	3. 2	33 ,36	3 ,706	8,444
558,0	3. 4	34 ,22	3 ,802	8,890
571,8	3. 6	35 ,06	3 ,896	9,334
585,3	3. 8	35 ,88	3 ,988	9,778
598,5	3. 10	36 ,70	4 ,078	10,222
611,3	4. 0	37 ,48	4 ,186	10,338
630,1	4. 3	38 ,64	4 ,294	11,334
648,4	4. 6	39 ,76	4 ,418	1 Z. 0,000 Lin.
666,1	4. 9	40 ,86	4 ,538	1 Z. 0,666 L.
683,5	5. 0	41 ,14	4 ,656	1. 1‴,334
700,4	5. 3	42 ,94	4 ,772	1. 2,000
716,9	5. 6	43 ,96	4 ,886	1. 2,668
732,9	5. 9	44 ,94	4 ,994	1. 3,334
748,7	6. 0	45 ,92	5 ,102	1. 3,996
779,3	6. 6	47 ,78	5 ,310	1. 5,334
808,7	7. 0	49 ,60	5 ,510	1. 6,666
837,1	7. 6	51 ,34	5 ,704	1. 8,000
864,5	8. 0	53 ,02	5 ,892	1. 9,340
891,2	8. 6 11	54 ,64	6 ,072	1.10, 66
917,0	9. 0	56 ,22	5 ,248	2 Z. 0,00 Lin.
942,2	9. 6	57 ,78	6 ,413	2 Z. 1,20
966,6	10. 0	59 ,28	6 ,586	2. 2,68
990,5	10. 6	1 M. 0,74″	6 ,748	2. 4,00
1014,0	11. 0	1′. 2″,18	6 ,908	2. 5,28
1036,0	11. 6	1. 3 ,56	7 ,062	2. 6,68

Weite nach wienerischen Klaftern, auf deren jegliches 6 wienerische Fuß gehen.	Elevation.	Winkel am Centro.	Winkel der Strahlenbrechung.	Verbesserte Strahlenbrechung.
1059,0 Kl.	1 Fuß 0″ 0‴	1′ 4″,94	7″,214	2 Z. 8,00 Lin.
1102,0	1′. 1″. 0‴	1. 7 ,58	7 ,508	2. 10,68
1144,0	1. 2. 0	1. 10 ,14	7 ,792	3. 1,34
1184,0	1. 3. 0	1. 12 ,60	8 ,066	3. 4,00
1223,0	1. 4. 0	1. 14 ,98	8 ,330	3. 6,66
1260,0	1. 5. 0	1. 17 ,28	8 ,588	3. 9,32
1297,0	1. 6. 0	1. 19 ,52	8 ,836	4. 0,00
1332,0	1. 7. 0	1. 21 ,70	9 ,078	4. 2,66
1367,0	1. 8. 0	1. 23 ,82	9 ,314	4. 5,32
1401,0	1. 9. 0	1. 25 ,90	9 ,544	4. 8,00
1434,0	1. 10. 0	1. 27, 92	9 ,770	4. 10,66
1466,0	1. 11. 0	1. 29, 90	9 ,988	5. 1,32
1497,0	2 Fuß 0″ 0‴	1. 31 ,82	10 ,204	5. 4,00
1672,0	2. 6. 0	1. 42 ,56	11 ,394	7. 3,40
1834,0	3. 0. 0	1. 52 ,48	12 ,496	8. 0,00
1981,0	3. 6. 0	2. 1 ,48	13 ,498	9. 4,00
2118,0	4. 0. 0	2. 9 ,86	14 ,430	10. 8,00

§. 232.

Der Anfänger merke bey dem Gebrauch dieser Tafel, daß wenn die Elevation für eine Weite, welche in der Tafel nicht befindlich ist, gesucht wird, alsdann das Verhältniß nicht nach der einfachen Zahl der Klafter, sondern nach ihren Quadraten gemacht werden müsse, weil die Elevationen sich zu einander, wie die Quadrate der Weiten verhalten. Gesezt man wollte wissen, was z. B. für eine Elevation der Weite von 325 Klaftern zukomme? Da $318,1^2 : 330,2^2 = 1''1''' : 1''2'''$, so sage man $330,2^2 - 318,1^2 : 325^2 = 1''' : x$, so wird man fast $1''1''',4$ erhalten, welche Grösse die Elevation für eine Weite von 325 Klaftern giebt, nemlich $1''1''',4$. Was die Strahlenbrechung anbetrift, so habe ich (§. 178.) gesagt, daß sie fast $\frac{1}{9}$ des Winkels am Centro beträgt, welchen man leicht aus der Weite findet. Die Verbesserung für die Strahlenbrechung wird durch die Gleichung gefunden, wie sich der in Sekunden getheilte Radius zur Strahlenbrechung verhält, so verhält sich die Weite zu der vorzunehmenden Verbesserung. Nachdem wir dies überhaupt erklärt haben, was bey der grössern Libellation zu merken ist, so wollen wir nun sehen, was für Instrumente dazu vorzüglich gebraucht werden können.

Von den Wagen.

§. 233.

Die zu der bey grössern Libellationen erforderlichen Wage nöthigen Theile sind der Tubus, um durch ihn die Zeichen genauer unterscheiden zu können, theils auch die Perpendikel, theils genaue Wasserwagen, wodurch man dem Tubis die gehörige Lage verschaft. Die übrigen Stükke sind accidentel, und machen die Arbeit theils mehr, theils weniger leichter. Deswegen werde ich nur zwey Wagen beschreiben, die eine rührt vom Pikard her, und ist mit einem Perpendikel versehen, die andere vom Pat. Liesganig, und hat eine Wasserwage. Ich werde alle diejenigen weglassen, welche statt des Perpendikels oder der Wasserwage Wasser, das in Gefässen von mancherley Einrichtung sich nach der Horizontallinie formt, erfodern, um die gehörige Lage zu erhalten, weil nemlich ihr Gebrauch, wenn ich überhaupt reden soll, zu unbequem ist, als daß sie verdienten, empfohlen zu werden.

§. 234.

Pikards Libelle ist in der 93. Figur vorgestellt. Der Tubus AE besteht aus festem Bleche, und wird nach einem rechten Winkel an eine andere lange blecherne Röhre LM gelötet, welche unten etwas weit wird. Bey L hängt man ein Perpendikel Ls auf, welches an einem etwas wei-

ten Ringe (Fig. 94.) auf die Nadel gehängt wird, deren Spitze durch das Blech L in das andere in D, wo das Centrum angemerkt ist, eingetrieben wird. Der Tubus AE hat in der Weite des Brennpunktes der Objektivlinse ein doppeltes Quadrat EFGH, welches die 95. Figur deutlicher vorstellt. Das vierekte Gestell ABCD läßt oben eine kleine Schraube E durchgehen, und hat an der ihr überstehenden Seite DC eine Stahlfeder K, die Seiten AD und BC halten ein anderes Vierek FGIH in Fugen, in welchem Vierekke sich Faden in einem rechten Winkel durchschneiden. Diese Faden sind einfache seidene Faden, wie sie aus dem Gespinste des Seidenwurms ausgewikkelt werden. Dieses Vierek muß durch die Schraube E von oben herab und durch die Spannung der Stahlfeder K wieder hinaufgetrieben werden, bis sich der Durchschnittspunkt der Faden mit dem Centro der Objektivlinse, welche in einem ähnlichen Vierek ABCD (Fig. 93.) eingeschlossen ist, und der Axe des Tubus in einer geraden Linie befindet. In eben das Ende des Tubus, worinn sich die Faden befinden, wird eine kleine Röhre HEIK eingestochen, die eine Okularlinse hat und beweglich ist, so daß sie für ein jedes Auge eingerichtet werden kann. Der unterste Theil der vertikalen Röhre LM, durch deren Axe ein feiner Faden geht, welcher das Bleywurf s trägt, enthält ein messingenes Blech nopq, in dessen Fugen ein anderes von Silber, welches in r einen Punkt hat, den der Faden,

wenn das Instrument seine ordentliche Lage hat, schneiden muß, auf beyde Seiten ein wenig hin und her bewegt und, wenn es nöthig ist, fest gemacht werden kann. Mit dem Tubus AE sind auf der einen, und der Röhre LM auf der andern Seite, zwey Bogen X und Y, die aus festen Metall gemacht sind, verbunden, worauf die ganze Wage ruhet. Die Stütze der Maschine ist von dem Gerüste, dessen die Mahler bey ihren Arbeiten sich zu bedienen pflegen, nicht sehr unterschieden. In die Löcher N, P werden starke Stifte gestochen, die die Bogen X und Y tragen. Doch sind die Vorderfüsse dieses Gerüstes mit eisernen Stäben versehen, welche vorwärts getrieben werden können, damit das Instrument auch auf einem unebenen und rauhen Boden fest stehen könne. Befindet sich die Wage einmahl in ihrem rechten Stande, so wird der Stab VT von hinten in die Erde fest gesetzet. Die Grösse dieser Maschine ist willkührlich. Pikard giebt dem Tubus AE drey, und der perpendikulairen Röhre LM 4 Fuß.

§. 235.

Weit besser ist jene Wage zu gebrauchen, welche der oben angeführte P. Liesganig hat machen lassen, und die wir zu beschreiben uns vorgenommen haben. AB (Fig. 96.) ist ein aus festem Bleche gemachter Tubus von 5 Fuß. Nahe an jedem Ende ist ein metallenes Behältniß, welches zwey Quadrate KLON und MLOP hat. Auf glei-

che Art befinden sich an dem andern Ende A die gleichen Vierekke DEGH und EHIF in ihrem Behältniß, welche die 97. und 98. Figur einzeln vorstellt. Aussen gegen das Ende des Tubus hat das Vierek ABCD (Fig. 98.) durch die Seiten AB und AD Schrauben I und K, die ihnen entgegenstehenden Seiten BC und CD haben Stahlfedern L und M, welche innwendig das Vierek EFGH gegen die ihnen gegenüber stehenden Schrauben treiben, so daß man es seitwerts und vertikal schieben kann. In diesem innwendigen Vierek befindet sich ein Objektivglas N. Das Behältniß nahe am Ende B enthält ein diesem ganz gleiches Vierek. Dieses andere Vierek stellt die 97. Fig. vor, und es ist von dem erstern blos darinn unterschieden, daß statt des Glases Faden ausgespannt sind, die sich in einem rechten Winkel im Centro durchschneiden. Dieses Vierek stehet nahe an dem erstern, und liegt auf beyden Seiten nach der Mitte des Tubus hin, und wird durch die Buchstaben LOPM und DEHG (Fig. 96.), so wie das andere mit dem Glase, durch die Buchstaben KLON und FIHE in derselben Figur, bezeichnet. Es ist also der Tubus mit zwey Objektivgläsern und mit zwey Kreutzfaden, die auf beyden Seiten in den Brennpunkten der Gläser stehen, versehen. Die kleine Röhre AC enthält das Okularglas, und ist für jede Oefnung des Tubus A und B so eingerichtet, daß man sie auf beyden Seiten, ohne den Tubus verrükken zu dürfen, einstechen kann.

Damit auch nicht eine etwas rauhe Oberfläche beym Einschieben und Ausziehen der Röhre die Beobachtungen unrichtig machen könne, so umzieht man sie auswendig mit einem seidenen Streifen, der etwas haarreich ist, wodurch zugleich dem Wanken dieser Röhre in dem Tubo abgeholfen wird.

Die Behältnisse KP und DI sind einander vollkommen gleich und vierekt, daß, wenn sie auf einer geglätteten Tafel gesezt werden, man sehen kann (wiewohl dieses in der Folge auf eine andere Art untersucht wird), ob die Axe stets mit der Tafel parallel sey, wenn sie, bey der nach und nach vorgenommenen Umkehrung der vier Seiten eines jeden Behältnisses, und Aufstellung in einerley bezeichneten Punkten, stets das Objekt im Durchschnittspunkte der Faden zeigt.

Fast auf der Mitte der Oberseite des Tubus befindet sich eine Wasserwage S, wie wir sie oben (§. 207.) beschrieben haben, ausser daß sie keine Dioptern hat, mit ihrem kurzen Fußgestell Q, R durch Schrauben befestigt. Auf der entgegenstehenden Seite der Wage ist ein starkes Stük Metall TV angelötet, welches durch ein anderes gleicher Art, das aus dem Halse des Fußgestelles kommt, durch die Schrauben a und b verbunden wird. Hieran sizt ein mit Zähnen versehener halber Zirkel cd, damit vermittelst der Schraube fe, deren Schraubengänge in die

Zähne des halben Cirkels cd greifen, der Tubus auf der Vertikalfläche auf und niedergelassen werden kann. Unter diesem halben Cirkel befindet sich ein horizontal liegender Cirkel lgh, gleichfals mit Zähnen versehen, auf welchem der Hals des Instruments liegt, und der durch eine andere Schraube k i zugleich mit dem Tubus horizontal seitwärts bewegt werden kann. Die ganze Maschine ruhet auf drey starken Füssen m, n, o, an deren lezterem hohle Stükken Eisen mit Schraubengängen angebracht sind, durch welche eine starke eiserne Schraube mit einem gehörigen Griffe durchgelassen wird, damit die Füsse desto leichter die Wage in eine horizontale Lage bringen können.

§. 236.

Man sieht aus dieser Einrichtung der Libellen, wie bequem sie zu grossen Libellationen zu gebrauchen sind. Um bey kleinern Libellationen den Tubus mit wenigern Umständen gebrauchen zu können, kann man ihn kürzer machen lassen, statt des Metalls TV kann ein hohles Cylinderförmiges Behältniß angebracht werden, um dasselbe auf ein Fußgestell passen zu können, wie sonst bey den Winkelmessern üblich ist, ja, wenns gut zu seyn scheinet, kann man ihn selbst auf dem Meßtische, dessen man sich sonst zu Messungen bedienet, ruhen lassen. Doch dies wird sich einem jedem, der selbst nachdenkt, leicht darbieten. Es wird auch durch die doppelten Objektivgläser und

Kreuz=

Kreutzfaden nicht der geringste Nachtheil verursacht, denn jenes vermindert das deutliche Sehen gar nicht, sondern machet nur, daß der Brennpunkt des Okularglases um desto kürzer wird, wenn der Brennpunkt des Objektivglases nicht lang ist; die Faden aber erfodern nur eine akkurate Stellung, welche man durch die Untersuchung herausbringt. Die entfernten Faden kann man nicht sehen, und sie verschlingen nicht mehr Licht, als zarte Flekken, die dem Glase zuweilen anhängen.

Von der Untersuchung der Wagen.

§. 237.

Die doppelte Untersuchung, die wir in dem 209. und 212. §. für Dioptern in kleinen Wagen auseinander gesezt haben, paßt auch für die Tubos, ausser daß bey der erstern die Summe der Höhen des Auges AO + Bo (Fig. 99.) die wahre Höhe der Zeichen Bm und AM um die gehörige Elevation bey der Weite der Standörter A und B doppelt überschreiten müssen. Diese Weite muß so groß seyn, daß sie kaum unter 309 Klaftern ist, und man muß entweder aus der oben angeführten Tafel, oder aus der Berechnung die Elevation der Wage, die ihr zukommt, wissen. Es wäre z. B. AB = 309 Klaftern, AO = 4′6″, Bo = 4′5″, Bm = 4′6″0,3‴, AM = 4′7″0,3‴, so wird AO + Bo = 8′11″, und AM + Bm = 9′,1″0,6‴, die Differenz = 2″0,6‴ seyn. In der Tafel gehört die

Ele=

Elevation von 1″ fast zu einer Weite von 309 Klaftern. Deswegen schließt man, daß die Faden in der Wage ordentlich stehen. Wenn sich aber die Summe der Höhen von den Zeichen auf 9′3″0,6‴ belaufen hätte, so würde der Fehler in der Weite von 309 Klaftern einen Zoll betragen haben. Man hätte daher das Zeichen in m um einen Zoll erniedrigen müssen, und eben so das Kreutz in der Fadendiopter vermittelst der Schraube, um es mit dem Zeichen in gleiche Richtung zu bringen. Das Gegentheil hätte geschehen müssen, wenn die Summe der Höhen kleiner gewesen wäre, als sie seyn muß. Man sieht den Grund hievon leicht ein. Denn da die Weite AB schon etwas groß ist, so können die Perpendikel MA und mB nicht mehr für Parallellinien gehalten werden, so wie auch nicht OM und om. Wir haben aber gezeigt, daß wenn diese Linien parallel sind, die Höhen des Auges und der Zeichen gleich sind. Da sich nun die Zeichen an den Enden der Linien OM und om befinden, so muß man auf die Elevation Rükſicht nehmen.

§. 238.

Wenn bey der andern Untersuchung (§. 212.) aus der Mitte D nach N und n visirt wird, so haben diese Zeichen die Elevation ON und on über dem wahren Horizont des Auges. Wenn die Wage nach dem Standort A gebracht wird, so muß zwar die Differenz der Höhe des

Zei=

Zeichens N und des Auges O, nemlich ON aus n nach o gebracht werden; aber es muß aus o an eben dem Meßstabe om gleich der Elevation der gehörigen Weite AB hinaufgetragen werden, und dann muß man nach m visiren, und den Durchschnittspunkt der Faden theils hinauf, theils herablassen, je nachdem es die Umstände erfodern.

§. 239.

Indessen sind diese Arten der Untersuchung für die Wage des Pikard's, und für jede andere, woben Perpendikel befindlich sind, nicht hinreichend, sondern man muß, wie ich im 213. §. von dem Winkelmesser gesagt habe, die ganze Maschine umkehren, und das Perpendikel an dem Ende des Behältnisses M aufhängen, damit es den Faden, ingleichen den Punkt an dem silbernen Bleche bey r, und den andern bey L, wo die Spitze der Nadel, welche sonst das Perpendikel trägt, hervorragt, dekke. Wenn in beyden Lagen der Durchschnitt der Faden auf das Zeichen fällt, so wird in dem Instrumente kein Fehler statt finden; findet sich aber in beyden Lagen eine verschiedene Höhe des Zeichens, so hat man ihr die Mitte zu geben, und nach abermahligen Visiren nach demselben, die Faden mit der Schraube entweder aufzuziehn oder herabzulassen, bis ihr Durchschnittspunkt das Zeichen dekt.

§. 240.

§. 240.

Um die Liesganigsche Wage auf eine bequeme Art zu untersuchen, muß man vorzüglich dafür sorgen, daß die gedoppelten perpendikulairen Bleche der Behältnisse KN und FI (Fig. 96.), die etwas grösser als die übrigen sind, einander vollkommen gleich und viereckigt sind. Man stelle den Tubus so auf eine wohl geglättete Tafel, daß die Seiten der Behältnisse, z. B. NP und GI, die Tafel berühren. Man bemerke auf der geglätteten Tafel die Linien, wo sie dieselbe berühren, und sehe nach einem gewissen Zeichen, das von dem Durchschnittspunkte der Faden gedekt wird. Man wende hierauf den Tubus um, daß die obern Seiten der Behältnisse KM und DF auf eben diese Linien auf der Tafel treffen, und man richte nun theils das Glas N (Fig. 98.), theils die Faden (Fig. 97.), damit dasselbe Zeichen in ihrem Durchschnittspunkte gesehen werde, so wird sich das Centrum des Glases und der Durchschnittspunkt der Faden in einer geraden Linie befinden.

§. 241.

Um dieses Vornehmen sicherer anzustellen, so mache man einen Tubus, der etwas kürzer als AB (Fig. 96.) ist, und auf ein Fußgestell gesezt werden kann, schneide den obern Theil weg, damit ein halber hohler Cylinder übrig bleibe. Man schleife seine hohle inwendige Seite für die Cylinder-

förmige

förmige Aussenseite des Tubus um seine Mitte aus, damit diese in jene wohl einpasse. Wenn der Tubus AB in den halben Cylinder eingepaßt ist, bringe man eine Wasserwage QSR an, und gebe ihr eine horizontale Richtung, daß die Luftblase die Mitte S einnimt, und visire nach dem Zeichen. Darauf kehre man den Tubus um, daß die Seiten der Behältnisse NP, GI, welche vorher unterwärts lagen, hinaufkommen. Man visire hernach nach demselben Zeichen, und bringe den Durchschnittspunkt der Faden auf den Ort, daß in beyden Lagen das Zeichen auf gehörige Art gesehen werde. Ist dieses geschehen, so schiebe man die Okularröhre in das andere Ende B, und wiederhole eben dieses Visiren, nachdem man den Tubus um seine Axe gedrehet hat. Man siehet, daß diese Untersuchung an und vor sich selbst von jenem Umkehren bey der Wage des Pikard nicht verschieden sey, ausser daß sie doppelt angestellt werden muß, da man doppelte Faden hat. Hat die Wage diese Untersuchung ausgestanden, so kann man sich sicher darauf verlassen, daß sie akkurat sey.

Von der Libellation.

§. 242.

Von der Libellation selbst habe ich nur weniges zu sagen. Ist sie einfach, als in der 89. Figur, zwischen den Weiten A und C, und das Instrument stehet in B

(wobey

(wobey es genug ist, wenn die Differenz nicht viel über 2 oder 3 Klafter ausmacht), so hat man keine Correktion nöthig, weder in Hinsicht der Elevation der scheinbaren Horizontallinie über dem wahren Horizont, noch in Hinsicht auf die Strahlenbrechung, weil auf beydes die Höhe der Zeichen einerley Wirkung hervorbringt, wie man von selbst siehet. Ist aber die eine Weite als BC oder AB merklich grösser, daß der Unterschied der für eine jede Weite gehörigen Elevation merklich ist, so muß man die Höhen um eine zweymahlige Correktion, nach der Tafel, vermindern. Wäre z. B. AB = 206 Klafter, BC = 103, die Höhe von AM = 7′ 2″, CN = 12′,5″,6‴, so hat man von AM 5,5‴ von CN aber 1,5‴ in Rüksicht auf die Elevation abzuziehen. Weil aber bey der Weite von 206 (oder 207) Klaftern die Strahlenbrechung die Objekte schon um einen Winkel von 1″,4 (wozu 1‴,2 gehören) erhebt, so siehet man deutlich, daß man von der scheinbaren Höhe nicht die ganze auf der Tafel gefundene Elevation, sondern nachdem sie durch Verbesserung der Strahlenbrechung ist vermindert worden, abzuziehen habe. Man muß nemlich von AM 5‴,5 — 1‴,2 oder 4‴,3 wegnehmen, von CN aber 1‴,5 — 0‴,3 oder 1‴,1. Daher wird AM = 7′1″7‴,7; CN = 12′5″4‴,8. Der Unterschied ist = 5′3″9‴,1.

§. 243.

Nicht anders verhält es sich mit der zusammengesezten Libellation; aber es werden alsdann die Höhen nur theils durch die Elevation der Wage über dem wahren Horizont des Auges, theils durch die Strahlenbrechung (oder kürzer, durch die Differenz der verbesserten Elevation und Refraktion) verbessert und angenommen, das übrige wird, wie bey der kleinen Libellation verrichtet. Ein einziger Zweifel, der etwan jemanden hier aufstossen könnte, ist noch zu heben. Die im 231. §. befindliche Tafel der Elevationen ist für bestimmte Weiten von Standörtern und den fest angenommenen Radius der Erde bestimmt. Es scheint aber unmöglich zu seyn, daß eben diese Grösse der Elevation bleiben sollte, wenn man die Höhe der Standörter verändert. So z. B. wenn man (Fig. 100.) aus dem höhern Standorte A nach dem niederen B visirte, so ist CD die Elevation; visirte man aber aus B nach A, so müßte man, um die Differenz der wahren Waglinien AC und BF oder AF zu erhalten, zu AE noch EF zusezen, welche Elevation der Linie der Wage BF, nach der Tafel der Elevation CD gleich seyn müßte, welches aber nicht seyn kann, da CD zu EF, wie die Weite des Standorts A vom Centro der Erde zur Weite des Standorts B von demselben. Eben dies gilt von allen Elevationen KL, GH u. s. f. auf niedrigern Standörtern.

§. 244.

§. 244.

Hierbey hat man aber auf zwey Stükke Acht zu geben. Es kann nehmlich zuförderst die Weite der beyden Standörter, bey der Libellation von der Beschaffenheit seyn, daß der Unterschied der Höhen, der sich in den Standörtern befindet, nicht Klafter, sondern bloß Füsse in sich enthält, und zwar, wenn er sehr groß ist, nur wenige. Denn wäre er grösser, so müßte man ihn nicht durch die Libellation, sondern durch trigonometrische Höhenmessung finden. Ein so unbeträchtlicher Unterschied zwischen zwey Standörtern ist aber allerdings stets in der Weite vom Centro der Erde unmerklich. Es ist hiernächst zwar wahr, daß sich die Elevationen CD und EF wie die Radii verhalten, mit welchen die ähnlichen Bogen AC und BF beschrieben werden, aber so wie die Höhe AF in Rükſicht auf den Radius der Erde nichts wird, so wird auch der Unterschied der Elevationen CD und EF nichts. Ist aber nicht die Rede von zweyen unmittelbar auf einander folgenden Standörtern, von denen der eine merklich höher als der andere ist, sondern von Standörtern, zwischen denen ein sehr grosser Erdstrich liegt, und wo z. B. die Höhe AN in Rükſicht auf den Radius der Erde ein merkliches Verhältniß hat, die Weite AC tausend Klafter betrüge, und der andern Weite MO gleich wäre, so werden die Bogen AC und MO nicht weiter einander gleich seyn, sondern der Winkel, den MO mißt, wird weit

grösser als der seyn, den AC mißt. Wächst der Winkel, so wächst auch die Elevation GH, und nimt er im Gegentheile ab, so wird auch sie kleiner.

§. 245.

Hieraus sieht man leicht, daß es sich hierbey eben so verhält, wie bey der Reduktion der Triangel zum Horizonte. Hierbey nehmen wir die Grundlinie nach der Fläche des Meeres an, welches nur in dem Falle geschieht, wenn die Differenz der Horizontalflächen sehr merklich ist, auf welche man vom Anfange an die Triangel reducirt. Sollte sich ein solcher Fall bey der Libellation finden, so läugne ich nicht, daß bey sehr hohen Oertern die Elevationen anders, als bey sehr niedrigen sind, wenn die Weiten der Standörter gleich sind. Denn es sey der Radius der Erde, nach dessen Grösse die Tafel verfertigt ist, $= R$, für sehr merkliche Höhen $= R + d$, die Weite der überall gleich weit voneinander liegenden Standörter $= D$, die Elevation für den Radius $= e$, Nach dem Grundsatze, nach welchem die Tafel verfertigt ist, muß $\frac{D^2}{2R} = e$,

und $\frac{D^2}{2(R+d)} = e - x$ (weil, wenn der Divisor grösser wird, der Quotient kleiner werden muß), folglich hat man $D^2 = 2Re = 2(R+d)(e-x)$; oder $Re = (R+d)(e-x) = Re - Rx + de - dx$; nimt man

das

das gleiche Re weg, und verſezt die Glieder, ſo wird de $= (R + d)\,x$, woraus ſich folgende Gleichung ergiebt, $R + d : d = e : x$; der bey Verfertigung der Tafel gebrauchte Radius der Erde, der um die merkliche Gröſſe d (der Differenz) vergröſſert iſt, verhält ſich zu dieſer Gröſſe, wie (die Elevation) e, die dem Radius R nach der Weite D angemeſſen iſt, zur Gröſſe x, die man von der in der Tafel angegebenen Elevation abziehen muß, um die Elevation für die Höhe d bey eben dieſer Weite D zu finden.

Siebenter Abſchnitt.

Von der Geodäſie oder Landtheilung.

§. 246.

Unter dem Nahmen der Geodäſie oder Landtheilung verſtehen wir hier nichts anders, als die Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf Ausmeſſung und Austheilung der Aekker, Wieſen und anderer Plätze, wegen welcher ſo häufige Streitigkeiten und Fragen entſtehen. Wer die Theorie genug inne hat, wird bey der Praxis nur einiger Erinnerungen bedürfen. Eine doppelte Aufgabe wird für die ganze Sache hinreichend ſeyn.

§. 247.

Erste Aufgabe. Einen irregulairen Platz, dessen Grentzen ABCDEFGHIKLMNOP (Fig. 101.) sind, zu messen.

Auflösung. Vor allen muß man die Grentzen auf gerade Linien reduciren, zum B. die Seite ABC auf aBb, wobey man den Raum aAB, den man verliehrt, durch den Raum BbC, den man hinzufügt, so genau als möglich wieder einbringt, welches man ohngefehr dadurch, daß man die geraden Linien AB, Bb und bC, und den Bogen der Krümmung, wo sie am größten zu seyn scheinet, mißt, auch durch das Augenmaaß verrichten kann. Eben so kann man pONm für die krumme Linie PONM setzen. Darauf setzet man in a, b, m, p die Stäbe mit ihren Zeichen, und mißt, wenn es nöthig zu seyn scheint, nach der 12. Aufgabe im 149. §., die vier Seiten abmp, und sucht den von ihnen eingeschlossenen Raum zu erhalten. Eben so setzt man statt CDEIKLM das geradlinichte dein, u. s. w., thut die Räume zusammen, und erhält so den ganzen gesuchten Raum.

§. 248.

Anmerkung. Befinden sich in dem zu messenden Platze Hügel oder Thäler, und man hat in Rüksicht auf die Früchte, die daselbst wachsen können, die Grösse zu

schätzen,

schätzen, so muß man den Platz nach der Horizontalfläche nehmen. Denn auf einer sich senkenden Fläche ABCD (Fig. 102. Tafl. XI.) können nicht mehrere Bäume oder Korn stehen, als auf einer Horizontalfläche AEFD, die zu ihr paßt, weil einzelne Bäume, Kornähren, u. s. m. eine gewisse horizontale Weite unter sich behalten müssen, die auf einer gesenkten Fläche nicht grösser ist. Wir denken uns aber andere Nebenumstände und solche Dinge, die der Fruchtbarkeit nachtheilig sind, hinweg, und denken uns das Land in dem ganzen Platze als gleich gut. Denn jenes gehet die Geodäsie nichts an, sondern muß von den Oekonomen geschlichtet werden.

§. 249.

Zweyte Aufgabe. Einen Platz ABCD (Fig. 103. und 104.) zu theilen.

Erster Fall. Wenn der Platz ABCD (Fig. 103.) einem Trapezio sehr nahe kommt, welches bey Aekkern sich oft zuträgt.

Auflösung. Man messe erstlich den Raum des Trapeziums nach den bekannten trigonometrischen Verfahrungsarten. Zweytens, man nehme die Winkel BCD, ADC; weil das Maaß der Seite CD bekannt ist, so kann man den Raum des Triangels CED finden. Drittens, man suche auch die Höhe des Triangels BEA, indem man

die Seite AB zur Grundlinie annimt. Viertens, man theile den Raum des Trapeziums ABCD in so viel gleiche Theile, als geschehen soll. Fünftens, man sage: Wie der Raum des Triangels ABE zu seinen Raum, der um einen Theil des Trapeziums, z. B. $\frac{1}{3}$ (wenn es in drey Theile getheilt werden soll) verringert ist, so das Quadrat der Höhe des Triangels ABE zum vierten Gliede, dessen Quadratwurzel von der Höhe des Triangels ABE abzuziehen ist. Sechstens. In der Weite dessen, was nach dem jetzt gefundenen übrig bleibt, ziehe man mit AB die Parallellinie HG, so wird der Raum BGHA ein Theil, hier der dritte, vom Trapezio seyn. Durch eben dieses Verfahren kann die übrige Eintheilung zu stande gebracht werden, nur darf der eine Theil nicht kleiner als der Triangel FCD seyn, welcher entsteht, wenn CF mit AB parallel gezogen wird. Der Beweis ergiebt sich deutlich aus dem vorhergehenden, da die einander ähnlichen Triangel BEA und GEH sich wie die Quadrate der Höhen verhalten. Wäre ein Theil der Eintheilung kleiner als der jetzt genannte Triangel, so würde die Aufgabe wie in dem folgenden Falle aufgelöset werden.

Zweyter Fall. Wenn der zutheilende Platz kein Trapezium ist, oder wegen der erst angezeigten Ursach die Eintheilung nach der vorhergehenden Methode nicht vorgenommen werden kann. Man soll z. B. den Platz

ABCD

ABCD (Fig. 104.) in drey gleiche Theile theilen. Man setze die Meßstäbe in E, F, G, H aus, und theile blos nach dem Augenmaasse, messe darauf die einzelnen Plätze AEFB, FEGH, HGCD. Es wird sich kaum der Fall ereignen, daß sie einander gleich gefunden werden sollten. Hierauf sehe man zu, wie viel ein Theil von den leztern als GHDC grösser oder kleiner ist, als ein Drittheil vom Ganzen. Man messe GH, und dividire das, was mehr oder weniger ist, als der Drittheil durch die Zahl der Füsse (oder Klafter) der geraden Linie GH, so wird der Quotient die halbe Höhe des von dem Platze HGCD wegzunehmenden Triangels HIG seyn. Daher sage man nun ferner: wie der Sinus des Winkels GHI zum Sinus totus, so die gefundene Höhe des Triangels GHI zu HI. Man wird nun HI erhalten, und wenn man durch I und G eine gerade Linie zieht, so wird IGCD der dritte gesuchte Theil des ganzen Platzes seyn. Wenn man auf gleiche Art BAEF kleiner findet, als es seyn müßte, so findet man aus der Seite FE als aus der Grundlinie, und dem Winkel EFK die Höhe des noch hinzuzufügenden Triangels FEK, und es muß durch K die gerade Linie EK gezogen werden, damit die Eintheilung richtig werde.

Dritter Fall. Wenn die Plätze ganz irregulair sind, so wird bey der Ausübung folgende Art der Eintheilung

lung angewendet werden können. Man hat gewisse Maschinen, die aus metallenen wohl geglätteten Cylindern und einem unter denselben befindlichen breiten Bleche bestehen, wodurch das Bley zu dünne Bleche und zwar überall von gleicher Dikke ausgedehnt wird. Man mache vermittelst der Mensul oder des Winkelmessers auf einem Papiere einen so genauen Abriß von dem Platze, der getheilt werden soll, als die Umstände erlauben. Dieses Papier leime man auf ein Blech von Bley, grabe mit einem Grabstichel nach dem Gange des Umkreises durch das Papier in die Bleytafel Zeichen ein, und schneide darauf das, was auser den Grentzen ist, ab. Darauf theile man nach dem Augenmaasse die Bleytafel ein, und zerschneide sie nach den Linien der Eintheilung, merke aber vorher (durch) eingegrabene Punkte, oder andere Zeichen) die Theile wohl, die vor dem Zerschneiden aneinander stiessen. Man wäge nun die Theile genau ab, und schneide von denen, die zu groß sind, den Theil ab, welcher davon muß, um ein Gleichgewicht unter ihnen zu erhalten; doch nehme man ihn von der Seite hinweg, wo sie an die, welche kleiner sind, anstieß. Ist dieses geschehen, so lege man wiederum die Stükke des Bleyes auf einer ebenen Tafel aneinander, und zwar in eben der Ordnung, als sie vorher, da sie noch nicht zerschnitten waren, aneinander fassen. Man wird leicht sehen, durch was für Punkte die Durchschnitte gehen, und wird aus den vorher

vor=

vorgenommenen Messungen und der Scala, nach welcher die Abzeichnung auf dem Papiere vorgenommen ist, die Punkte auf der Erde selbst finden, die zu diesen gehören. Der Grund liegt am Tage, weil die Oberflächen des Blechs der Schwehre proportionirt sind, da sie einerley Dikke haben. Man gebraucht aber Bley, damit auch sehr kleine Stükken, die man zu den Theilen hinzu thut, welche durch die erste Abtheilung zu klein geworden waren, auf einer genauen Wage einen desto merklichern Ausschlag geben.

§. 250.

Uebrigens merke man erstlich. Hat man regulaire Plätze zu theilen, oder Parallelogrammen, so geben uns hierin die Lehren der Geometrie hinreichende Verfahrungsarten an, sie in so viel Theile, als man will, zu theilen. Ich habe daher es nicht für nöthig gehalten, etwas davon zu erwähnen. **Zweytens.** Kann man die Eintheilung in Triangel vornehmen, so haben wir schon mehrere Aufgaben gehabt, die hinreichend sind, nur sind die Winkel auf den Aekkern nicht bequem, des Pflügens wegen. **Drittens.** Zuweilen trägt es sich zu, daß man durch Aekker oder Wiesen neue Wege ziehen muß, wodurch den Aekkern etwas benommen wird, wenn sie einige Breite haben sollen. Haben die Aekker parallellaufende Seiten, so ist kein Zweifel, daß sie am wenigsten verliehren,

wenn

wenn man den Weg auf dieselben perpendikulair ziehet. Auch entstehen bisweilen andere Fragen, die man durch die Geometrie auflösen kann. Man nehme einmahl an, daß sich um die Mitte des Akkers I (Fig. 103.) einige fruchttragende Bäume befänden, die zwey Besitzer haben. Der eine mag über die Seite des Akkers BC, der andere disseits der Seite AD wohnen. Jeder soll den Zutritt zu den Bäumen haben dürfen. Es frägt sich nun, wie durch I der Weg geführt werden soll, um dem Akker am wenigsten Abbruch zu thun, den die mit gleichem Rechte besitzen, denen die Bäume gehören? Wenn, nachdem der Triangel BEA gezogen ist, die gerade Linie EI den Winkel bey E in zwey gleiche Theile theilet, so kann man leicht aus der Geometrie (§. 475.) abnehmen, daß der Weg RIS so gezogen werden müsse, daß er einen gleichschenklichten Triangel abschneidet. Denn man kann EIals die Diagonale des Rhombus ansehen, zwischen dessen zwey Seiten, die den Winkel E einschliessen, dieser gezogene Weg, als die kürzeste Linie begriffen ist, und auf den Winkel I gezogen wird. Befände sich aber der Punkt I auf einer andern geraden Linie IE (Fig. 105.), die den Winkel E nicht in zwey gleiche Theile theilet, so will ich hier zwar die Auflösung dieses Falles anzeigen, aber nicht beweisen, weil sie sich auf die Methode des unendlich grossen und kleinen bezieht. Man theile IE in zwey Theile in O, und beschreibe aus dem Centro O mit dem Radius OI einen Cir-

kel-

Kelbogen IN. Die kürzeste Linie KL, die durch I gehet; wird die seyn, welche den Bogen IN in M so schneidet, daß der Theil IL = KM wird. Eben diese Frage kann bey Gelegenheit eines Brunnens, der auf einer Wiese oder sonst einem fruchtbaren Lande liegt, entstehen, wenn mehrere das Recht haben aus ihm schöpfen zu dürfen. Doch ich füge nichts mehr hinzu. Die unzähligen und verschiedenen Fälle, die hier möglich sind, lassen keine besondern Regeln geben. Diejenigen, die die Theorie wohl inne haben, werden aus den allgemeinen Lehren der Geometrie ohne Schwierigkeit absehen können, was zu thun sey.

Das

Das dritte Capitel.

Von einigen Anwendungen der Algeber, und dem Gebrauche der Sinuße und Cosinuße in derselben.

§. 251.

Erste Aufgabe. Wenn der Cosinus des einfachen Winkels gegeben ist, den Sinus und Cosinus des vielfachen Winkels zu finden.

Auflösung. Obgleich diese Aufgabe leicht aufgelöset werden kann, wenn man in der XVIII. und XIV. Formel für den Sinus des doppelten Winkels $A = B$ angenommen hat; hiernächst wenn man diesen gefunden und für A substituirt hat, den Sinus des dreyfachen Winkels, u. s. f. erhält, so wollen wir doch eine andere Auflösung hersetzen. Es sey BAC (Fig.106.) ein einfacher Winkel, der Radius $AB = 1$, der Sinus BC, Cosinus $AC = c$; so wird der Sinus $BC = \sqrt{1 - cc}$ seyn; ziehet man AB und AC aus, und trägt AB nach BD, DG, GH, HL u. s. f. und läßt auf AL die Perpendikel DE, HI u. s. f. fallen, auf AK aber die Perpendikel GF, LK u. s. f; so siehet man leicht, daß, weil der Triangel ADB gleichschenklicht ist, $EBD = 2BAC$ sey, und weil auch BDG gleichschenklicht ist, so ist $GDF = DGA + GAF$, oder,

weil

weil DGA = DBG = 2BAC, so wird GDF = 3BAC. Auf eben diese Art erhellet, daß HGL = 4BAC, LHK = 5BAC u. s. f. sey. Daher ist DE der Sinus des doppelten, EB der Cosinus des doppelten, GF der Sinus des dreyfachen, DF der Cosinus des dreyfachen, IH der Sinus des vierfachen, IG der Cosinus des vierfachen, LK der Sinus des fünffachen, HK der Cosinus des fünffachen Winkels u. s. f. Ausserdem ists klar, daß, da der Winkel bey A gemeinschaftlich ist, alle rechtwinklichte Triangel ABC, ADE, AGF u. s. f. einander ähnlich sind, und es wird AB : BC = AD : DE, oder $1 : \sqrt{1 - cc} = 2c : DE$ $= 2c\sqrt{1 - cc}$; eben so wird AB : AC = AD : AE, oder 1 : c = 2c : AE = 2cc; aber BE = AE — AB, daher wird der Cosinus des doppelten Winkels = 2cc — 1 seyn. Für den dreyfachen Winkel ist AB : BC = AG : GF, und wenn man die Werthe substituirt, $1 : \sqrt{1 - cc} = 1 + 4cc - 2 : GF = (4cc - 1)\sqrt{1 - cc}$. Ingleichen verhält sich AB : AC = AG : AF, das heißt 1 : c = $1 + 4cc - 2 : AF = 4c^3 - c$. Man ziehe AD = 2c ab, so wird DF = $4c^3 - 3c$ werden. Hieraus siehet man, wie man zu den Sinus und Cosinus des vier, fünffachen Winkels und weiter gehet.

§. 252.

Maclaurin macht in dem Traktat von der Algeber hierbey die Anmerkung, daß man die Sinus auch durch folgen=

folgende Regel erhalte. Man mache einen binomischen Satz, dessen erstes Glied der Cosinus, der andere der Sinus, jeder aber positiv ist. Man erhebe dieses Binomium zu der Potenz, deren Exponens die verlangte vielfache Zahl des Winkels ist. Für den Sinus nehme man die gleichen Glieder, nemlich das zweyte, vierte, sechste u. s. w.; verändere aber die Zeichen wechselsweise durch + und —. Für den Cosinus nehme man die ungleichen Glieder, das erste, dritte, fünfte u. s. und ändere eben so die Zeichen. Ein Beyspiel. Wir wollen den Sinus und Cosinus des vierfachen Winkels suchen, so wird $(c + \sqrt{1 - cc})^4 = c^4 + 4c^3\sqrt{1-cc} + 6c^2(1-cc) + 4c(1-cc)\sqrt{1-cc} + (1-cc)^2$. Die gleichen Glieder sind, wenn man die Zeichen wechselsweise verändert, $4c^3\sqrt{1-cc} - 4c(1-cc)\sqrt{1-cc} = (4c^3 - 4c + 4c^3)\sqrt{1-cc} = (8c^3 - 4c)\sqrt{1-cc}$, welches der Sinus des vierfachen Winkels ist. Die ungleichen Glieder sind, bey wechselsweise veränderten Zeichen, $c^4 - 6c^2(1-cc) + 1 - 2cc + c^4 = c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2cc + c^4 = 8c^4 - 8c^2 + 1$, gleich dem Cosinus des vierfachen Winkels.

Wenn der Cosinus des einfachen Winkels genannt wird $c = c^I$, des doppelten $= c^{II}$, des dreyfachen $= c^{III}$, des vierfachen $= c^{IV}$, u. s. w. (wobey die Zahlzeichen nicht die Exponenten, sondern den Cosinus des vervielfältigten

tigten Winkels anzeigen), so kann auf die angezeigte Art leicht folgende Tafel verfertigt werden, die man, so weit man will, weiter führen kann.

Sinus des Bogens.	Cosinus des Bogens.
des einfachen $s^I = \sqrt{1-cc}$	des einfachen $c^I = c$
des doppelten $s^{II} = 2c\sqrt{1-cc}$	des doppelten $c^{II} = 2cc-1$
des dreyfachen $s^{III} = (4cc-1)\sqrt{1-cc}$	des dreyfachen $c^{III} = 4c^3 - 3c$
des vierfachen $s^{IV} = (8c^3 - 4c)\sqrt{1-cc}$	des vierfachen $c^{IV} = 8c^4 - 8c^2 + 1$
des fünffachen $s^V = (16c^4 - 12cc + 1)\sqrt{1-cc}$	des fünffachen $c^V = 16c^5 - 20c^3 + 5c$
des sechsfachen $s^{VI} = (32c^5 - 32c^3 + 6c)\sqrt{1-cc}$	des sechsfachen $c^{VI} = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1$
des siebenfachen $s^{VII} = (64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1)\sqrt{1-cc}$ u. s. w.	des siebenfachen $c^{VII} = 64c^7 - 112c^5 + 56c^3 - 7c$ u. s. w.

§. 253.

Zweyte Aufgabe. Eine allgemeine Formel für den Tangens des vervielfältigten Winkels zu finden, wenn der Tangens des einfachen Winkels gegeben wird.

Auflösung. Sie ist aus der Formel des Tangenten (§. 52. VII.) und der vorhergegangenen Regel leicht zu finden.

Es sey der gegebene Tangens = t, der Cosinus = c, der Sinus = $\sqrt{1-cc}$. Weil $t = \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$, so wird $t = \frac{\sqrt{1-cc}}{c}$ seyn. Man erhebe den binomischen Satz $c + \sqrt{1-cc}$ zu einer unbestimmten Potenz des Exponenten n, so wird

$$c^n + nc^{n-1}\sqrt{1-cc} + \frac{n.n-1}{1.2}c^{n-2}(1-cc) + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}c^{n-3}(1-cc)\sqrt{1-cc} + \frac{n.n-1.n-2\,n-3}{1.2.3.4}$$
$$c^{n-4}(1-cc)^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}c^{n-5}$$
$$(1-cc)^2\sqrt{1-cc} \text{ u. s. w.}$$

Da die Sinus die gleichen Sätze mit abwechselnden Zeichen sind, und die Cosinus die ungleichen, so wird (weil R = 1) der Tangens des vervielfältigten Winkels seyn =

$$nc^{n-1}\sqrt{1-cc} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}c^{n-3}(1-cc)\sqrt{1-cc}$$

$$c^n - \frac{n.n-1}{1.2}c^{n-2}(1-cc) + \frac{n.n}{1.}$$

+

$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}c^{n-5}(1-c^2)^2\sqrt{1-cc}\ u.\ s.\ w.$$

$$-\frac{1.n-2.n.-3}{2.3.4.}c^{n-4}(1-cc)^2\ u.\ s.\ w.$$

Nun ist $t=\frac{\sqrt{1-cc}}{c}$, $t^2=\frac{(1-cc)}{c^2}$, $t^3=\frac{(1-cc)\sqrt{1-cc}}{c^3}$, u. s. w. und $c^{n-1}\sqrt{1-cc}=c^n\times\frac{\sqrt{1-cc}}{c}$; ingleichen $c^{n-3}(1-cc)\sqrt{1-cc}=c^n\times\frac{(1-cc)\sqrt{1-cc}}{c^3}$ u. s. f., wenn wir daher gleiches für einander substituiren, so wird

$$nc^nt-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.}c^nt^3+\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5.}c^nt^5\ u.\ f.$$

$$c^n-\frac{n.n-1}{1.2}c^n\times t^2+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}c^nt^4\ u.\ s.\ f.$$

oder, weil sich c^n in allen Gliedern befindet, so wird, wenn man es wegläßt

$$nt-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}t^3+\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}t^5\ u.\ s.\ f.$$

$$1-\frac{n.n-1}{1.2}t^2+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}t^4\ u.\ s.\ f.$$

§. 254.

Wir sagten im 17. §, daß die Sinus und Cosinus eines jeglichen Bogens dieselben blieben, wenn man zu demselben die ganze Peripherie des Cirkels addirte; ja wenn man nicht eine allein, sondern auch mehrere hinzuthäte. Nimt man daher den Bogen = A an, die Peripherie = C, so werden die Bogen A, A+C, A+2C, A+3C, u. s. f. durchaus einerley Sinus und Cosinus haben. Man kann nun jeden Bogen A als den vervielfältigten Bogen $\frac{A}{m}$ ansehen, wo m die Zahl der gleichen Theile bedeutet, worinn man den Bogen getheilet annimt; so wie man daher A, A + C, A + 2C u. s. w. als vervielfältigte Bogen ansiehet, so beziehen sich $\frac{A}{m}$, $\frac{A+C}{m}$, $\frac{A+2C}{m}$, $\frac{A+3C}{m}$ auf dieselben als ihre einfachen Bogen. Es drükken nun in den Gleichungen, die wir im 252. §. für die Cosinus anführten, $c^{I} = c$, $c^{II} = 2cc - 1$, $c^{III} = 4c^3 - 3c$ u. s. f., c^{I}, c^{II}, c^{III} u. s. f. die Cosinus der vervielfältigten Bogen, nemlich A, A+C, A + 2C, A + 3C u. s. f. aus, folglich wird c die Cosinus der einfachen Bogen $\frac{A}{m}$, $\frac{A+C}{m}$, $\frac{A+2C}{m}$ u. s. f. ausdrükken, woraus sich ergiebt, daß, wenn man jene Gleichungen für Ausdrükke eines höhern Grades ansieht,

man

man ihre Wurzeln durch die Cosinus der Bogen $\frac{A}{m}, \frac{A+C}{m}$ u. s. f. erhalten könne. Es ist aber der Mühe werth, den Fortgang dieser Bogen zu erforschen, damit man wisse, was und wie viel man von einem solchen Cosinus für einen jeden vervielfältigten Winkel erhalten könne.

§. 255.

Erster Lehnsatz. Man mag einen Bogen A, welchen man will, haben (nur ist die halbe oder ganze Peripherie ausgenommen), so ist der letzte Bogen, der den Cosinus, als die Wurzel der Gleichung giebt, $\frac{A+(m-1)C}{m}$.

Denn wenn man noch eine Peripherie hinzuthut, so wird man $\frac{A+mC}{m} = \frac{A}{m} + C$ erhalten; aber $\frac{A}{m} + C$ hat keinen andern Cosinus als $\frac{A}{m}$ (§. 17.), daher darf man nicht weiter fortgehen.

§. 256.

Zusatz. Aus dem ersten Abschnitte des ersten Capitels erhellet überflüßig, daß Bogen, die sich wechselsweise zu vier Rektis ergänzen, einerley Sinus und Cosinus haben. Man könnte daraus abnehmen, daß so wie die Bogen $\frac{C-A}{m}$ und $\frac{C+A}{m}$ einander zu $\frac{C}{m}$ wechsels-

weise ergänzen, eben so die Cosinus der Bogen $\frac{C-A}{m}$, $\frac{2C-A}{m}$ u. s. f. nicht weniger zu den Wurzeln, als die Cosinus der Bogen $\frac{C+A}{m}$, $\frac{2C+A}{m}$ u. s. f. gehören. Dennoch hat man doch diese Bogen nicht zu nehmen, da sie nicht neue Wurzeln, sondern eben dieselben geben würden. Denn ein jeder Bogen $\frac{C-A}{m}$, $\frac{2C-A}{m}$, $\frac{3C-A}{m}$ hat einen von den Bogen $\frac{A+C}{m}$, $\frac{A+2C}{m}$, $\frac{A+3C}{m}$ ..... $\frac{A+(m-1)C}{m}$, der ihn zu vier Rektis ergänzt. So ergänzt sich $\frac{C-A}{m}$ und $\frac{A+(m-1)C}{m}$ untereinander, da $\frac{C-A+A+mC-C}{m} = C$ ist; eben so $\frac{2C-A}{m} + \frac{A+(m-2)C}{m} = C$ u. s. f.

§. 257.

Zweyter Lehnsatz. Wenn der Bogen A der halben Peripherie gleich ist, und m eine ungleiche Zahl ist, so befindet sich unter den durch den halben Cirkel vervielfältigten Bogen $\frac{A}{m}$, $\frac{A+C}{m}$ u. s. f. stets einer, dessen

Cosinus

Cosinus — 1 ist, wenn man den Radius oder Sinus totus für 1 nimt.

Dies erhellet, wenn man für A, $\frac{C}{2}$ sezt, denn es wird dann $\frac{C}{2m}$, $\frac{\frac{C}{2}+C}{m}$, $\frac{\frac{C}{2}+2C}{m}$ + u. s. f., $\frac{\frac{C}{2}+(m-1)C}{m}$, oder, wenn man reducirt, $\frac{C}{2m}$, $\frac{3C}{2m}$, $\frac{5C}{2m}$, $\frac{7C}{2m}$, $\frac{9C}{2m}$ ..... $\frac{C+2mC-2C}{2m}$ = $\frac{1C}{2m}$, $\frac{3C}{2m}$, $\frac{5C}{2m}$ . . . . C — $\frac{C}{2m}$. In dieser Progreßion sind die Coefficienten der Zähler ungleiche Zahlen, man kömmt daher zu einer herab, die = m ist; ist folglich m = 5, so kommt man auf $\frac{5C}{2\times5}$ und $\frac{C}{2}$. Es hat aber $\frac{C}{2}$ den Cosinus = — 1. Eben so, wenn m = 7, so wird der Ausdruk $\frac{7C}{2m} = \frac{C}{2}$ und sein Cosinus ist = — 1. Man sieht aber, daß dieser Ausdruk nicht der lezte sey, weil m bey dieser Vorausseţung = 7 ist, der lezte ist $\frac{\frac{C}{2}+(7-1)C}{7} = \frac{13}{14}$.

§. 258.

Dritter Lehnsatz. Wenn A = C ist, so ist die Peripherie C der lezte Bogen, und sein Cosinus = +1. Um zu zeigen, was alsdenn m sey, darf man nur in dem lezten Ausdrukke $\frac{A+(m-1)C}{m}$, C für A sezzen: denn er geht auf $\frac{C+mC-C}{m} = C$ aus.

§. 259.

Vierter Lehnsatz. Die Bogen $\frac{A}{m}, \frac{A+C}{m}, \frac{A+2C}{m}$ . . . $\frac{A+(m-1)C}{m}$ erhält man, wenn der gegebene Bogen AL = A (Fig. 107.) in den Punkten B, E, F, G u. s. f. durch m dividirt wird, und hat man den Anfang der Abtheilung in dem Punkte B genommen, wenn man in den Punkten H, I, K, M, u. s. w. die ganze Peripherie durch m theilt.

Beweis. Es sey z. B. m = 5, so wird AB = $\frac{A}{5}$, und weil BH = $\frac{1}{5}$C ist, so wird BI = $\frac{2}{5}$C, BK = $\frac{3}{5}$C, BM = $\frac{4}{5}$C; daher AB = $\frac{1}{5}$A, ABH = $\frac{A+C}{5}$, ABHI = $\frac{A+2C}{5}$, AHIK = $\frac{A+3C}{5}$, AHIM = $\frac{A+4C}{5}$ seyn.

seyn. Folglich allgemein wird $AB = \frac{A}{m}$, $ABH = \frac{A+C}{m}$, $ABI = \frac{A+2C}{m}$, $ABK = \frac{A+3C}{m}$ u. s. w. seyn.

§. 260.

Lehrsatz. Wenn man aus einem jedem Punkte V im Diameter auf die vorhergenannten Punkte der Eintheilungen B, H, I, K, M gerade Linien VB, VH, VI u. s. f. ziehet, und die Cosinus der Bogen AB, AH, AI u. s. f. a, b, c, d, u. s. f. heissen, die Entfernung des Punktes V vom Centro C aber $= x$, der Radius des Cirkels $= 1$ ist, so wird $VB^2 \times VH^2 \times VI^2 \times VK^2 \times VM^2$ u. s. w. $= (1 - 2ax + xx)(1 + 2bx + xx)(1 + 2cx + xx)(1 + 2dx + xx)(1 - 2fx + xx)$ u. s. w., dergestalt, daß der zweyte Satz in diesen Gleichungen das — Zeichen hat, wenn die Cosinus positiv, das + Zeichen aber hat, wenn sie negativ sind, nach §. 6.

Beweis. Es ist $BV^2 = BP^2 + PV^2 =$ (da $PC = a$, $VC = x$) $BC^2 - PC^2 + (PC - VC)^2 = 1 - a^2 + (a - x)^2 = 1 - a^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 1 - 2ax + xx$. Eben so $VH^2 = HQ^2 + VQ^2 = CH^2 - CQ^2 + (VC + CQ)^2 = 1 - b^2 + (b + x)^2 = 1 + 2bx + x^2$. Es erhellet auf eben diese Art, daß $VI^2 = 1 + 2cx + xx$, $VK^2 = 1 + 2dx + xx$, $VM^2 = 1 - 2fx + xx$ u. s. f. seyn. Daher ist $VB^2 \times VH^2 \times VI^2 \times VK^2 \times$

VM^2 u. s. f. $= (1 - 2ax + xx)(1 + 2bx + xx)$
$(1 + 2cx + xx)(1 + 2dx + xx)(1 - 2fx + xx)$ u. s. f.
W. Z. E. W.

§. 261.

Erster Zusatz. Wenn in den Gleichungen für die Cosinus (§. 252.) $c^I = c$, $c^{II} = 2c^2 - 1$ u. s. f. ist, und $c - c^I = 0$, $2c^2 - 1 - c^{II} = 0$ u. s. f. wird, und man für c (um allgemeine Gleichungen zu erhalten) $\frac{1 + xx}{2x}$ sezt, so wird man folgende Gleichungen erhalten.

$$\frac{1 - 2c^I x + xx}{2x} = 0$$

$$\frac{1 - 2c^{II} x^2 + x^4}{2xx} = 0$$

$$\frac{1 - 2c^{III} x^3 + x^6}{2x^3} = 0$$

$$\frac{1 - 2c^{IV} x^4 + x^8}{2x^4} = 0$$

$$\frac{1 - 2c^{V} x^5 + x^{10}}{2x^5} = 0$$

$$\frac{1 - 2c^{VI} x^6 + x^{12}}{2x^6} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Ganz allgemein wird jede Gleichung eines Cosinus vom vervielfältigten Bogen ausgedrükt werden, wenn man c^I, c^{II}, c^{III}, und s. f. $= t$ sezt, wenn er positiv ist, und $-t$,

$-t$, wenn er negativ ist; für die Exponenten 1, 2, 3, u. s. w. sezze man m, daher wird $\frac{1+2tx^m+x^{2m}}{2x^n} = 0$.

§. 262.

Zweyter Zusatz. Weil die Gleichung für den Cosinus des vervielfältigten Bogens statt der Wurzeln die Cosinus der Bogen $\frac{A}{m}$, $\frac{A+C}{m}$, $\frac{A+2C}{m}$ u. s. f. haben muß (§. 254.), das heißt, die Cosinus der Bogen AB, AH, AI u. s. f. (Fig. 107. §. 260.), oder a, —b, —c, u. s. w., so müssen die Wurzeln der Gleichungen $\frac{1-2c^{I}x+xx}{2x} = 0$, $\frac{1-2c^{II}x^2+x^4}{2x^2} = 0$ u. s. f. a, —b, —c seyn, und es werden folglich (weil wir statt des Cosinus c vom einfachen bestimmten Bogen allgemein $\frac{1+xx}{2x}$ gesezt haben) $\frac{1+xx}{2x}-a$, $\frac{1+xx}{2x}+b$, $\frac{1+xx}{2x}+c$, u. s. f. ihre Divisoren seyn, oder $\frac{1-2ax+xx}{2x}$, $\frac{1+2bx+xx}{2x}$, $\frac{1+2cx+xx}{2x}$ u. s. f. Es drükkt aber $\frac{1+2tx^m+x^{2m}}{2x^m} = 0$ jede Gleichung zum Cosinus des vervielfältigten Bogens aus; dahero ist es augenscheinlich, daß die Divisoren desselben dieselben seyn werden, und daher wird stets

$$\frac{1+2tx^m+x^{2m}}{2x^m} = \frac{(1-2ax+xx)}{2x}\,\frac{(1+2bx+xx)}{2x}\,(1+2$$

$$\frac{(1+2cx+xx)}{2x} \times \frac{(1+2dx+xx)}{2x} \frac{(1-2fx+xx)}{2x} \text{ u. s. f.}$$

bis das Produkt der Divisoren x gleich x^m wird; wenn alsdann aber beyde Glieder auf ihren Divisor gebracht werden, so bleibet $1 \overline{+} 2tx^m + x^{2m} = (1-2ax+xx)(1+2bx+xx)(1+2cx+xx)$ u. s. f.

§. 263.

Dritter Zusatz. In dem Lehrsatze nahmen wir an, daß $1 = AC$, $x = VC$ sey: und weil wir folglich $VB^2 \times VH^2 \times VI^2$ u. s. f. $= (1-2ax+xx) \times (1+2bx+xx)(1+2cx+xx)$ u. s. w., so wird auch $AC^{2m} \overline{+} 2t \times VC + VC^{2m} = VB^2 \times VH^2 \times VI^2 \times VK^2$ u. s. f.

§. 264.

Vierter Zusatz. Wenn ein gegebener Bogen A der ganzen Peripherie gleich gemacht wird, so wird $t = +1$; und die Gleichung $1 \overline{+} 2tx^m + x^{2m}$ gehet auf $1 - 2x^m + x^{2m}$ aus, wovon die Quadratwurzel $x^m - 1 = \sqrt{1-2ax+xx}\sqrt{1+2bx+xx}\sqrt{1+2cx+xx}$ u. s. f. ist. Ist aber A der halben Peripherie gleich, so wird $t = -1$ und die Gleichung wird in $x^m + 1 = \sqrt{1+2ax+xx}\sqrt{1+2bx+xx}\sqrt{1+2cx+xx}$ u. s. w. verändert.

§. 265.

§. 265.

Aus diesen Zusätzen ergiebt sich nun die Art, Gleichungen aufzulösen, deren Form $x^{2m} + 2tx^m + 1$, oder $x^m + 1$ ist. Weil aber t den Cosinus eines gewissen Bogens bezeichnet, und 1 für den Radius angenommen ist, so folgt, daß, damit die Auflösung durch die Division des Cirkels geschehen könne, 2t weniger als die doppelte $\sqrt[2m]{}$ des lezten Gliedes seyn müssen, da man stets dabey 1^{2m} verstehet. Die Sache wird aus folgenden Aufgaben erhellen, welche statt der Exempel dienen werden.

§. 266.

Dritte Aufgabe. Durch die Division des Cirkels und vermittelst der Sinustafeln die Wurzeln der Gleichung $x^8 - 6x^4 + 36 = 0$ zu finden.

Auflösung. Man halte diese Gleichung gegen die allgemeine $x^{2m} - 2tx^m + 1$ oder $x^{2m} - 2tx^m + 1^{2m}$; so wird $m = 4$, $1^{2m} = 1^8 = 36$ seyn. Um die Sinustafeln hier gebrauchen zu können, reducire man diese Potenz des Radius auf Eins, welches geschehen wird, wenn man die Glieder der Gleichung durch Glieder einer geometrischen Progreßion, deren erstes Glied 1, das lezte 36 ist, dividirt. Diese werden daher seyn $1, \sqrt[4]{6}, \sqrt{6}, \sqrt[4]{6^3}, 6, 6\sqrt[4]{6}, 6\sqrt{6}, 6\sqrt[4]{6^3}, 36$, und die Gleichung $x^8 -$

$x^4 + 1$

$x^4 + 1$ werden, wie aus der Algebr erhellet. Daher ist, wenn der Radius = Eins angenommen ist, $t = \frac{1}{2}$. Man weiß ferner, daß $\frac{1}{2}$ der Sinus des Winkels von 30° ist, oder der Cosinus des Winkels von 60° ist, und da man hier einen positiven Cosinus hat, so ist $A = 60°$

$\frac{A}{m} = \frac{60°}{4} = 15$, dessen Cosinus oder Sinus 75° für a zu nehmen ist. Eben so sieht man, daß $\frac{A+C}{m} = 15° + 90° = 105°$ sey, dessen Cosinus wie der Sinus von $15° = -b$ ist; $\frac{A+2C}{m} = 15° + 180° = 195°$, dessen Cosinus der Sinus von $75° = -c$ ist. Endlich $\frac{A+3C}{m} = 15° + 270° = 285°$, dessen Cosinus der Sinus von $15° = +d$ ist. Man nehme nun diese Sinus aus den Tafeln $a = 0,9659258$, $-b = -0,2588190$, $-c = -0,9659258$, $+d = 0,2588190$, und substituire sie statt $\sqrt{(1 - 2ax + xx)}\sqrt{(1 + 2bx + xx)}$ u. s. w., so wird $(1 - 1,9318516x + xx)(1 + 0,5176380x + xx)(1 + 1,9318516x + xx)(1 - 0,5176380x + xx) = x^8 - x + 1$ entstehen. Es giebt nun jede quadratische Gleichung zwey Wurzeln von x; die erste giebt $x = 0,9659258 \pm \sqrt{-0,0672375988943\overline{6}}$; die dritte $x = 0,9659258 \pm \sqrt{-0,0672375988943\overline{6}}$; die zweyte

$x =$

$x = -0{,}2588190 \pm \sqrt{-0{,}933012725239 00}$; die vierte

$x = 0{,}2588190 \pm \sqrt{-0{,}933012725239 00}$, woraus man siehet, daß alle acht Wurzeln imaginaire sind. Weil wir aber alle durch $\sqrt[4]{6}$ dividirt haben, so hat man sie alle wieder durch $\sqrt[4]{6}$ zu multipliciren, um die Wurzeln für die gegebene Gleichung $x^8 - 6x^4 + 36$ zu erhalten. Doch muß man merken, daß so wie man die Sinus und Cosinus nur durch die Näherung erhält, daß auch diese Wurzeln nicht vollkommen genau, sondern nur den wahren sehr nahe erhalten sind.

§. 267.

Erster Zusatz. Weil der Ausdruck $\pm 2tx^m$ das mittelste Glied der ganzen Gleichung ist, so ist es, um ihn für den auf Eins reducirten Radius zu bekommen, genug, wenn man ihn durch die andere Wurzel des lezten Gliedes, hier, durch sechs dividirt.

§. 268.

Zweyter Zusatz. Wenn die Gleichung $x^8 + 6x^4 + 36 = 0$ gegeben wäre, so wäre durch dieselbe Reduktion auf $x^8 + x^4 + 1 = 0$, $t = -\frac{1}{2}$ gewesen, und es hätte für A der Bogen von 120° genommen werden müssen, dessen Cosinus $= -\frac{1}{2}$ ist.

§. 269.

§. 269.

Vierte Aufgabe. Die Wurzeln der Gleichung $x^4 + b^4 = 0$ zu finden.

Auflösung. Weil $x^4 + b^4$ die zweyte Wurzel der Gleichung $x^8 + 2b^2 x^4 + b^8 = 0$ ist, und das zweyte Glied das Zeichen + hat, so ists augenscheinlich, daß, wenn $b = 1$, $x^8 + 2x^4 + 1 = 0$ herauskömmt, und der Bogen A die halbe Peripherie seyn müsse, weil $2r = 2$, und folglich $r = -1$ ist. Man theile nun die halbe Peripherie (weil $m = 4$) in vier gleiche Theile, so wird der erste Bogen $= 45° = \frac{A}{m}, \frac{A+C}{m} = 45° + 90° =$ 135° seyn, dessen Cosinus gleichfals der Sinus des Bogens von 45° ist; $\frac{A+2C}{m} = 45° + 180° = 225°$, dessen Cosinus gleichfals der Sinus eines Bogens von 45° ist, wie auch des vierten $\frac{A+3C}{m} = 45° + 270° = 315°$.

Man kann daher alle diese Cosinus durch Wurzelausdrükke ausdrükken, nemlich $+\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}$; substituirt man diese bey $\sqrt{1-2ax+xx}$ $\sqrt{1+2bx+xx}$ $\sqrt{1+2cx+xx}$ $\sqrt{1+dx+xx}$, so wird $x^4 + b^4 =$ $\sqrt{b^2 - 2bx\sqrt{2}} \times \sqrt{b^2 + bx\sqrt{2} + xx} \times$ $\sqrt{b^2}$

$\sqrt{b^2 + bx\sqrt{2} + xx}$, $\times$ $\sqrt{b^2 - bx\sqrt{2} + xx}$, und wenn man wirklich multiplicirt, so bekömmt man

$b^4 - b^3x\sqrt{2} + b^2x^2 - 2b^2x^2 + bx^3\sqrt{2} + x^4 = b^4 + x^4$,
$+ b^3x\sqrt{2} + b^2x^2 \qquad - bx^3\sqrt{2}$

Die erste Gleichung giebt $x = \frac{b + b\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$; die andere

$x = \frac{-b + b\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$. (Denn es wird $(b^2 - bx\sqrt{2} + xx)$
$(b^2 + bx\sqrt{2} + xx)$).

§. 270.

Man sieht aus diesem Exempel, daß die Wurzeln genau gefunden werden, wenn man die Cosinus algebraisch genau ausdrükken kann. So oft nun ein regulaires Polygon in einen Cirkel geometrisch eingeschrieben werden kann, können, wie wir im 439. §. der Geometrie gesagt haben, die Seiten davon, wenn man den Radius $= 1$ annimt, algebraisch ausgedrükkt werden, und hat man einen solchen Ausdrukk der Seite, so kann man auch so die Cosinus ausdrükken. Durch diese Bemerkung kann man die Wurzeln der Einheit, wenn sie auf die dritte, vierte, fünfte, sechste u. s. w. Potenz erhöhet wird, erhalten, indem wir dann $1 = x^3$, $1 = x^4$, $1 = x^5$, $1 = {}^6$ u. s. w. annehmen, und darauf die Gleichungen $x^3 - 1 = 0$, $x^4 - 1 = 0$, $x^5 - 1 = 0$ u. s. w. formi-

ren. Man gebraucht in der Algeber ferner diese Wurzeln der Einheit, so daß, wenn man einmahl auf die Cardanische Art eine Wurzel der Gleichung gefunden hat, man auch die übrigen findet. Wir wollen zu dem Ende folgende Aufgabe hinzufügen.

§. 271.

Vierte Aufgabe. Die Wurzel von $\frac{1}{m}$ der Einheit zu finden, wenn man m gleich 3, 4, 5, 6, 15 u. s. f., oder so groß annimt, daß ein Polygon von so viel Seiten, als m Einheiten hat, in einen Cirkel geometrisch eingeschrieben werden kann.

Auflösung. Um die Sache durch ein besonderes Exempel zu zeigen, so suche man drey Cubikwurzeln, oder m sey $= 3$. Man nehme die Gleichung $x^3 - 1 = 0$, welche die Wurzel von $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$ ist. Weil $2t = 2$, so wird $t = 1$ seyn. Der gegebene Bogen ist folglich die ganze Peripherie, welche daher in drey gleiche Theile zu theilen ist, oder man muß darinn einen gleichseitigen Triangel einsetzen, dessen Winkel am Centro $=$ 120° ist, und den Cosinus $= -\frac{1}{2}$ hat; der andere Bogen wird, nach wiederum hinzuaddirten 120°, $= 240°$ und hat denselben Cosinus $= -\frac{1}{2}$; der dritte ist die ganze Peripherie, deren Cosinus $= +1$ ist, daher wird die Gleichung $x^3 - 1 = (1 + x + xx)\sqrt{1 - 2x + xx}$. Der

Theil

Theil $1+x+xx$ giebt die Wurzeln $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$;

der andere Theil $\sqrt{1-2x+xx}$ giebt $x = 1$, daher finden sich drey Wurzeln, wovon die eine eine wirkliche ist, die übrigen beyden imaginaire Wurzeln sind.

§. 272.

Eben so, wenn man die Wurzeln der vierten Potenz sucht, gedenke man sich ein Quadrat in dem Cirkel beschrieben und nehme die Gleichung $x^4 - 1 = 0$, so werden die Cosinus des ersten Bogens $= 0$, des andern $= -1$, des dritten $= 0$, des vierten $= +1$ werden, und $\sqrt{1+xx}$ $\sqrt{1+2x+xx}$ $\sqrt{1+xx}$ $\sqrt{1-2x+xx}$ werden, die erste und dritte giebt $x = \pm\sqrt{-1}$; die andere $x = -1$; die vierte $x = +1$.

Für Wurzeln der fünften Potenz nehme man die Gleichung $x^5 - 1 = 0$. Es wird $\frac{A}{m} = 72$ seyn, dessen Cosinus nach den 444 und 445 §§. d. Geometrie $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ist, der Bogen $\frac{A+C}{m} = 144°$ dessen Cosinus $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ ist. Eben diesen hat der dritte Bogen $\frac{A+2C}{m}$; des vierten Cosinus ist eben der, den der erste hat; der Cosinus der lezten endlich ist $= +1$.

Auf eben diese Art erhält man weiter die Wurzeln; wenn man andere Polygonen gebraucht, wie man hieraus deutlich genug sehen kann.

§. 273.

Zusatz. Hieraus kann man auch die Art und Weise die rationellen Faktoren der Gleichungen von dieser Form zu finden, abnehmen, nemlich von der Form $x^{2m} \pm 2tx^m + 1 = 0$, oder $x^m \pm 1 = 0$, wo 1 eine jede Grösse, die auf die Potenz 2m oder m erhoben ist, vorstellen kann, wiewohl man noch andere ganz algebraische Arten, dieses zu finden, hat. Um von der leztern ein Beyspiel zu geben, so wollen wir $x^4 - 1 = 0$ annehmen. Wir haben $x^4 - 1 = \sqrt{1+xx} \times \sqrt{1+2x+xx} \times \sqrt{1+xx} \times \sqrt{1-2x+xx}$ gehabt; es ist aber $\sqrt{1+xx} \times \sqrt{1+xx} = (1+xx)$; und $\sqrt{1+2x+xx} \times \sqrt{1-2x+xx} = \sqrt{1-2x^2+x^4} = x^2 - 1^2$; folglich wird das zweyte Glied $(1+xx)(x^2-1)$, welches Faktoren des andern Gliedes $x^4 - 1$ sind.

Eben so giebt in der dritten Aufgabe das zweyte Glied der Gleichung die dreytheilichten Faktoren des ersten, die in dem Falle nicht rationell sind, wie man sie öfters erhalten kann, als wenn die Gleichung $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$, und das andere Glied durch die Cosinus erhalten wäre

(1 —

$(1-2x+xx)(1+x+xx)(1+x+xx)$, wie man aus der vorhergehenden Aufgabe ersiehet.

§. 274.

Man wird übrigens leicht einsehen, daß der Gebrauch der Sinus und Cosinus in der Algeber sehr gemein sey, weil man durch sie Winkel geben kann, die man daher wie andere gegebene Grössen ansiehet, aus welchen man unbekannte findet.

Anfänger müssen indessen nur nicht glauben, daß wir alle die Formeln angeführt haben, deren man sich in der Algeber bedient. Es könnten in der That sehr viele andere aus den von uns erklärten herausgezogen werden. Zum Beyspiel mag die Formel für den Tangens der Summe, oder Differenz der Winkel A und B dienen. Wir fanden im 52. §. in der VII. Formel, daß tang. $A = \frac{\text{sin. } A}{\text{cos. } A}$; und daher auch tang. $(A \pm B) = \frac{\text{sin. } (A \pm B)}{\text{cos. } (A \pm B)}$.

Es ist aber (§. 52. Form. XVIII. und XVIIII.) $\frac{\text{sin. } (A \pm B)}{\text{cos. } (A \pm B)}$

$= \frac{\text{sin. } A \times \text{cos. } B \pm \text{sin. } B \times \text{cos. } A}{\text{cos. } A \times \text{cos. } B \mp \text{sin. } A \times \text{sin. } B}$. Nun bleibt aber derselbe Werth eines Bruchs, wenn man die einzelnen Theile des Zählers und Nenners durch einerley Grösse dividirt, daher wird man auch setzen können, tang. $(A \pm B) =$

$$\frac{\frac{\text{sin. A} \times \text{cos. B}}{\text{cos. A} \times \text{cos. B}} \pm \frac{\text{sin. B} \times \text{cos. A}}{\text{cos. A} \times \text{cos. B}}}{\frac{\text{cos. A} \times \text{cos. B}}{\text{cos. A} \times \text{cos. B}} \mp \frac{\text{sin. A} \times \text{sin. B}}{\text{cos. A} \times \text{cos. B}}}.$$

Nun wird das erste Glied des Zählers zum $\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}} = \text{tang. A}$; das andere zu $\pm \frac{\text{sin. B}}{\text{cos. B}} = \pm$ tang. B reducirt, das erste Glied des Nenners zur Einheit, das andre aber zu $\mp$ tang. A $\times$ tang. B. Daher erhält man tang. $(A \pm B) =$

$$\frac{\text{tang. A} \pm \text{tang. B}}{1 \mp \text{tang. A} \times \text{tang. B}} = \frac{\text{tang. A} \pm \text{tang. B}}{R^2 \mp \text{tang. A} \times \text{tang. B}}.$$

§. 275.

Vermittelst der XXXII. und XXXIII. Formel kann man die Formeln der Potenzen der Sinus und Cosinus eines Winkels finden. Denn wenn wir A = B setzen, so wird sin. A $\times$ sin. B = sin.^{2} A = $\frac{1}{2}$ cos. (A — A) — $\frac{1}{2}$ cos. 2 A = $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$ cos. 2 A. Wir wollen nun sin.^{2} A auf sin. A bringen, so erhalten wir sin.^{3} A = $\frac{1}{2}$ sin A — $\frac{1}{2}$ sin. A $\times$ cos. 2 A.

In dem zweyten Satze des andern Gliedes der Gleichung bringe man den Werth aus der XXXIII. Formel an, so wird $-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\text{sin.}(A + 2A) + \frac{1}{2}\text{sin.}(A - 2A))$ = $-\frac{1}{4}$ sin. 3A — $\frac{1}{4}$ sin. — A. Nimt man ferner den

Bogen

Bogen A negativ und kleiner als einen halben Cirkel an, so siehet man leicht ein, daß sein Sinus negativ sey, der Cosinus positiv bleibe, wenn der Bogen kleiner als ein Quadrant war; negativ hingegen, wenn er grösser war als ein Quadrant. Wendet man diese Bemerkung an, so wird der zweyte Satz hier $-\frac{1}{4}$ sin. 3 A $+\frac{1}{4}$ sin. A., verbindet man daher damit den ersten, so hat man sin.^{3} A $=\frac{3}{4}$ sin. A $-\frac{1}{4}$ sin. 3 A. Auf gleiche Art erhält man aus der XXXV. Formel cos.^{2} A $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ cos. 2 A, wenn man A $=$ B annimt. Bringt man die Gleichung auf cos. A, so wird cos.^{3} A $=\frac{1}{2}$ cos. A $+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}$ cos. (A+2A) $+\frac{1}{2}$ cos. (A $-$2A) $)=\frac{1}{2}$ cos A $+\frac{1}{4}$ cos. 3 A $+\frac{1}{4}$ cos. $-$A, und nimt man an, daß A $<90°$ ist, so ist sein Cosinus positiv, folglich mit dem Cosinus $+$A einerley, so daß man daher cos.^{3} A $=\frac{3}{4}$ cos. A $+\frac{1}{4}$ cos. 3A hat.

Die Gleichung sin.^{3} A $=\frac{3}{4}$ sin. A $-\frac{1}{4}$ sin. 3A giebt, wenn man sie auf sin. A bringt, sin.^{4} A $=\frac{3}{4}$ sin.^{2} A $-\frac{1}{4}$ sin. A $\times$ sin. 3A. Wenn man nur den Werth sin.^{2} A, den wir oben gefunden haben, anwendet, und aus der XXXII. Form. für sin. A $\times$ sin. 3A die Cosinus, wobey man B $=$ 3A annimt, so erhält man sin.^{4} A $=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}$ cos. 2 A $-\frac{1}{8}$ cos. $-$2A $+\frac{1}{8}$ cos. 4A, oder nimt man B $=$ 2A $<90°$ an, $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}$ cos. 2 A $+\frac{1}{8}$ cos. 4 A. Auf eben die Art findet man weiter, wenn man die Gleichung cos.^{3} A $=\frac{3}{4}$ cos. A $+\frac{1}{4}$ cos. 3A auf cos. A bringt, cos.^{4} A $=\frac{3}{8}$ $+\frac{1}{2}$

$+\frac{1}{2}$ cos. 2A $+\frac{1}{8}$ cos. 4 A. Und so wird man ferner die übrigen Potenzen finden können.

§. 276.

Diese Formeln lassen sich vortreflich gebrauchen, wenn ein Wurzelsatz, als z. B. $\sqrt{1 - xx}$, wobey 1 den Sinus totus, x aber den Sinus oder Cosinus eines Winkels bezeichnet, auf die Reihe $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16}$ u. s. w. gebracht werden soll, wo man dann statt x^2, x^4 u. s. w. die Potenzen des Sinus oder Cosinus, die man durch die gelehrte Art gefunden hat, sezt. In dem gegenwärtigen Falle, wenn x den Sinus eines Winkels v bedeutet, wird $\sqrt{1 - xx} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ cos. 2v $- \frac{3}{64} + \frac{1}{16}$ cos. 2v $- \frac{1}{64}$ cos. 4v $- \frac{5}{256} + \frac{15}{512}$ cos. 2v $- \frac{3}{256}$ cos. 4v $+ \frac{1}{512}$ cos. 6v u. s. f. $= \frac{175}{256} + \frac{175}{512}$ cos. 2v $- \frac{7}{256}$ cos. 4 v $+ \frac{1}{512}$ cos. 6v u. s. w. Wird nun der Winkel v gegeben, so wird man den Cosinus des doppelten, vierfachen, sechsfachen u. s. w aus den Tafeln erhalten, und kann, so lange es nöthig ist, wenn man die Reihe fortsezt, sich stets der Wahrheit mehr nähern.

Anmer-

Anmerkungen.

Zu dem 4. §.

Man merke, daß das Wort Supplement stets von der Ergänzung zu zwey Rektis; Complement aber von der Ergänzung zu einem Rektus gebraucht wird.

Zu dem 8. §.

Der Sekans ist, wenn der Winkel = 0° ist, gleich dem Sinus totus, wächst darauf mit dem Tangens und Winkeln durch den ganzen ersten Quadranten, wo er positiv ist, bis er in B mit dem Tangens unendlich wird. Von B bis D nimt er ab, ist negativ und wird in D gleich dem Sinus totus, wo der Tangens verschwindet. Von D wächst er wieder mit dem Tangens, wird positiv und in E unendlich, von da nimt er wieder mit ihm ab, wird negativ und in A wieder dem Sinus totus gleich, wo der Tangens 0 wird.

Zu dem 14. §.

1) Wenn FCA (Fig. 2.) = 45° ist, so ist, weil I = 90°, CFI = 45°, folglich FI = IC, da nun FI die halbe Sehne des doppelten Bogens ist, so ist FI die halbe Sehne eines Bogens von 90°, und da dies die Seite des regulairen Vierecks ist, so wird das Quadrat dieser Seite, die wir x nennen wollen, = $FC^2 + FC^2$

seyn, oder, wenn $FC = R = 1$ ist, wird $x^2 = 1 + 1 = 2$ seyn, folglich $x = \sqrt{2}$, und $\frac{1}{2}x\ (= FI) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, folglich $FI : FC = \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$ seyn.

2) Wenn $FCI = 45°$ ist, so ist $IC : AC = \sqrt{3} : 2$. Man merke hierzu folgendes.

Erster Lehrsatz. In dem gleichseitigen Triangel ACE (Fig. 110.) verhält sich die Seite AC zum Radius CO des Cirkels, der um den Triangel beschrieben ist, wie $\sqrt{3} : 1$.

Beweis. $OH = \frac{1}{2}OF$, und $AH = \frac{1}{2}AE$ (weil der Rhombus AOEF von beyden Linien als Diagonalen in H rechtwinklicht durchschnitten wird). $CH =$ (wenn der Radius $CO = 1$ genommen wird) $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $CA = x$. CA^2 wird daher $= CH^2 + AH^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x^2$, oder $\frac{3}{4}x^2 = \frac{9}{4}$, daher $x^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$, und x oder $CA = \sqrt{3}$, daher $CA : R = \sqrt{3} : 1$. seyn. W. Z. E. W.

Zweyter Lehrsatz. In dem gleichseitigen Triangel CAE (Fig. 110.) verhält sich die Höhe CH zur Seite $x\ (= CA) = \sqrt{3} : 2$.

Beweis. Wenn $CA = \sqrt{3}$ und $CO = 1$, so ist $CO + OH = \frac{3}{2}$, folglich verhält sich $CH : CA = \frac{3}{2} : \sqrt{3}$, oder $\frac{\sqrt{3}}{2} : 1$, oder $\sqrt{3} : 2$. W. Z. E. W.

Drit-

Dritter Lehrsatz. Wenn FCI (Fig. 2.) $=30°$ ist, so ist $2FCI = 60°$, und da F (wegen $I = 90°$) $= 60°$ ist, so ist IF die halbe Seite eines gleichseitigen Triangels. Da nun bey I ein rechter Winkel ist, und CI einen Winkel von $30°$ ($=\frac{1}{2}60°$) macht, so ist CI hier die Höhe eines gleichseitigen Triangels $=$ CH (Fig. 110.) und FC gleich einer der Seiten $=$ CA (Fig. 110.), folglich verhält sich IC : AC ($=$FC) wie CH : CA (Fig. 110.), oder wie $\sqrt{3} : 2$. W. Z. E. W.

Zu dem 15. §.

BR $=$ AG: denn da NCQ $=$ BCF, und BCD, ACB Quadranten sind, so bleiben, wenn gleiches von gleichem abgezogen wird, die gleichen Winkel PCN und FCA übrig, da nun bey P und I rechte Winkel sind, und FG $=$ CN, so ist BR $=$ AG.

Zu dem 27 §.

$$\text{Cos. A} = \text{sin. A} \times \text{cot. A}, \text{ daher ist } \frac{\text{cos. A}}{\text{sin. A}} = \text{cot. A.}$$

Denn wenn cos. A durch die Multiplication des sin. A und cot. A entstehet, so muß, wenn man mit dem einem Faktor, dem sin. A in diese Grösse dividirt, der andere $=$ cot. A herauskommen. Eben so, da tang. $A = \frac{R^2}{\text{cot. A}}$ so muß tang. A $\times$ cot. A $= R^2$ seyn, weil das, was vorher durch cot. A von dem R^2 weggenommen werden mußte, um ihn $=$ tang.

= tang. A zu machen, in dem leztern Falle durch die Multiplikation mit cot. A wieder auf tang. A gebracht wird.

Zu dem 28. §.

Beyde Werthe. Nemlich weil $\frac{1}{2}$ sin. 2 A = sin. A × col. A, und col. A auch $\frac{\text{sin. A}}{\text{tang. A}}$, so ist also $\frac{1}{2}$ sin. 2 A = sin. A × $\frac{\text{sin. A}}{\text{tang. A}}$ = $\frac{\text{sin.}^2 \text{A}}{\text{tang. A}}$, und da auch col. A = sin. A × cot. A, so ist $\frac{1}{2}$ sin. 2A auch = sin. A × sin. A × cot. A = sin.^{2} A × cot. A.

Zu dem 30. §.

$$\text{R} - \text{col. A} = \frac{2 \text{ tang. } \frac{1}{2}\text{A} \times \text{sin. A}}{2\text{R}},$$ denn man nehme in der vorigen Gleichung sin. A : R — col. A = 2R : 2 tang. $\frac{1}{2}$ A, das zweyte Glied zum vierten gemacht, so kommt diese Gleichung heraus.

Zu dem 35. §.

A bedeutet stets den grössern; B den kleinern Winkel.

Zu dem 59. §.

Der Sinus von 30° ist gleich $\frac{1}{2}$ R, da er die halbe Sehne des Bogens von 60° ist, welcher = R ist, er ist also, wenn R = 1 ist $\frac{1}{2}$, nehmen wir ihn aber zu 10,000000 an = 5,000000, so findet er sich auch in den Tafeln. Dieses merke man aber hierbey an, daß dieser Sinus von

30°,

30°, auſſer dem Sinus totus, der einzige iſt, den wir vollkommen haben, alle andere aber nur durch Näherung geſucht, und nur beynahe wahr ſind. Unter dieſe völlig wahre trigonometriſche Linien gehört noch der Tangens von 45° = R, weil der Triangel gleichſchenkelicht iſt, und der Sekans von 0° = R. Eigentlich iſt der Sinus des doppelten kleinen Bogens nicht ganz doppelt ſo groß, als der Bogen ſelbſt, und dieſes ſiehet man, ſo bald man die Berechnung auf mehrere Decimalſtellen vergrößert, doch kann man den Unterſchied zwiſchen den Bogen und Sinußen ſo klein als möglich machen, wenn man die Halbirung fortſezzet.

Zu dem 60. §.

Da wir in den vorhergehenden §§. bey den vorgenommenen Gleichungen den Radius auch = 1 angenommen haben, ſo ſind alſo alle die Sinus und Coſinus Brüche von 1, die Tangenten bis 45°, worauf ſie mehr als 1 werden.

Zu dem 61. §.

Man merke, daß die Logarithmen für den Radius 10000,000000, nicht für 10,000000, wie er in den gemeinen Tafeln ſteht, berechnet ſind. Denn es müßte ſonſt nach dem Briggiſchen Syſteme der Logarithme des Radius = 7,000000 ſeyn, und für den Sinus von einer Minute (= 2909) 3 zur Charakteriſtik haben. Es

sind aber in den gemeinen Tafeln die leztern 3 Zahlen bey den Sinußen weggelassen, die Logarithmen stehen aber, wie sie für den größern Radius 10000,000000 berechnet sind. Dieses schadet der Rechnung nicht. Denn man bekümmert sich so um die trigonometrischen Linien bey den Rechnungen nicht, sondern siehet die Logarithmen als Grössen an, die in einem richtigen Verhältnisse untereinander stehen, und zu Linien gehören, die sich miteinander in einem gewissen Verhältnisse befinden. Von den Logarithmen merke man an, daß nur die Logarithmen von dem Sinus totus und dem Tangens von 45° vollkommen richtig sind, ingleichen von den Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000.

Weil die Logarithmen nur Zahlen sind, die ein Verhältniß bezeichnen, und bey ihnen das erste Glied ó ist, die geometrische Reihe der Proportionen aber, zu welchen die Logarithmen gehören, sich von 1 anfängt, so müssen die Logarithmen das Multipliciren in ein Addiren verwandeln, das heißt, wenn wir zwey Logarithmen addiren, so müssen wir in der Summe eine Zahl erhalten, die zu der Zahl gehört, welche entsteht, wenn die beyden Zahlen, wozu die Logarithmen gehören, miteinander multiplicirt werden, oder die nach der angenommenen Basis des Systems anzeigt, was für ein Verhältniß nach dem in der geometrischen Reihe angenommenen Exponenten, oder was für eine Potenz durch jene Multiplication erhalten sey.

Denn

Denn wenn wir das Briggische System 1. 10. 100. 1000.
0. 1. 2. 3.
10000 annehmen, so wird, wie aus der Rechenkunst be-
4.
kannt ist, wenn wir die Zahlen 10 und 1000 multipliciren wollten, sich 1 zu 10 wie 1000 zu 10000 verhalten, oder 1. zum ersten Faktor, wie der andere zum Produkte. Da nun in der geometrischen Proportion das Produkt des ersten und vierten Gliedes dem Produkt des zweyten und dritten gleich ist, und die beyden gegebenen Faktoren stets das zweyte und dritte Glied ausmachen, so wird in jedem Falle, da hier das erste Glied immer 1 ist, wenn wir zwey Glieder der geometrischen Reihe multipliciren, das Produkt gleich der vierten geometrischen Proportionalzahl seyn, weil 1 nicht multiplicirt. Es sind nun die Logarithmen, die zu den geometrischen Proportionalzahlen gehörigen arithmetischen, oder ihre Exponenten. In der arithmetischen Proportion ist aber die Summe des zweyten und dritten Gliedes der Summe des ersten und vierten gleich. Addire ich also die Logarithmen des zweyten und dritten Gliedes, so muß ich den Logarithmen des vierten arithmetischen Gliedes erhalten, welches zu dem vierten geometrischen Gliede gehört, da beyde Reihen nach einerley Ordnung fortgehen: denn weil das erste Glied der Logarithmen, oder der arithmetischen Reihe stets o bleibt, so muß ja das zweyte und dritte Glied das vierte geben, weil o nicht addirt. Eben hierinn liegt der Grund von der Ver-

wand-

wandlung der Division in Subtraktion, der Ausziehung der Quadratwurzeln im dividiren durch zwey, und der Cubikwurzeln im dividiren durch drey, vermöge der Logarithmen.

Will man den Logarithmen des Sinus eines Winkels für den Radius = 1 haben, so muß man 10 abziehen. Sollten wir daher für den Radius 1 den Logarithmen des Winkels von 1′ suchen, so würden wir 10 von

6,4637261 abziehen.

10

— 3,5362738, negativ.

Zu dem 64. §.

Unter den kleinen Blakqschen Tafeln sind diejenigen die besten, die von Wolfen zu Halle teutsch und lateinisch herausgegeben sind. Zum genauern Gebrauch ist die Gardinersche Ausgabe der Sherwinschen Tafeln am bequemsten. In diesen Tafeln befinden sich 13 Columnen, und man kann durch sie die Logarithmen für mehrere Decimalstellen als in den gewönlichen Tafeln finden. Es stehet auch die Differenz der Logarithmen dabey, wodurch man der Mühe überhoben wird, sie selbst zu berechnen.

Zu dem 72. §.

Der Satz AB : BD = GB : HB wird so erwiesen. Der Triangel des Abschnittes GBH ist dem grossen Trian-

gel

gel ABD ähnlich: denn der inwendige Winkel bey G steht auf dem Bogen HAD, der Winkel A steht auf dem Bogen HGD, folglich beyde auf einem ganzen Cirkel, und sind daher als Peripheriewinkel = 180°. Da nun der inwendige und auswendige Winkel bey G zusammen auch = 180° sind, so muß daher der auswendige Winkel bey G dem Winkel A = seyn. Weil nun der Winkel B beyden Triangeln gemein ist, so sind die Winkel einander gleich und die Triangel einander ähnlich. Folglich AB:BD = GB : HB. W. Z. E. W.

Zu dem 73. §.

Man darf daher bey einem Triangel, dessen 3 Seiten ohne Winkel gegeben sind, wenn zwey Seiten einander gleich sind, nur die dritte als die Basis annehmen, und durch 2 dividiren, so erhält man 2 Grundlinien zweyer rechtwinklichten Triangel, mit zwey ihnen entgegenstehenden Seiten und dem rechten Winkel, und kann also ohne Mühe die sämtlichen Winkel finden.

Zu dem 74. §.

Der Winkel PCA ist die halbe Differenz der Winkel BCA (man sehe die zu diesem §. gehörige Figur, so wie auch im folgenden stets die Figuren, die zu den angeführten §§. gehören) und BAC, weil er, wenn man ihn zum kleinern giebt, die halbe Summe aus-

macht, und thut man ihn zur halben Summe, den grössern hervorbringt. Hierzu gehört der algebraische Satz. Wenn man von der halben Summe zweyer Grössen die halbe Differenz abzieht, so bleibt die kleinere Grösse übrig; thut man aber die halbe Differenz zur halben Summe hinzu, so kommt die grössere heraus.

Es sey die gantze Summe 16, die halbe Summe 8, die kleinere Grösse 6, die grössere 10, die ganze Differenz 4, die halbe 2, so wird die halbe Summe — der halben Differenz $= 8 - 2 = 6 =$ der kleinern Grösse, und die halbe Summe + der halben Differenz $= 8 + 2 = 10$ $=$ der grössern Grösse seyn, oder wenn wir die ganze Summe S, die halbe $\frac{1}{2}S$, die ganze Differenz d, die halbe $\frac{1}{2}d$, die kleinere Grösse q, die grössere Q nennen, so wird $q+q+d=Q+q=S$, und $\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}d=q+\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}Q+\frac{1}{2}q=\frac{1}{2}S$ seyn, ziehen wir nun $\frac{1}{2}d$ von $q+\frac{1}{2}d$ ab, so bleibt $q+\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}d=q$ übrig, welches die kleinere Grösse ist, addiren wir $\frac{1}{2}d$ zu $q+\frac{1}{2}d$, so erhalten wir $q+\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}d=q+d$, welches die grössere Grösse ist.

Haben wir daher zwey Grössen, von denen die kleinere mit einer andern x zusammengethan die halbe Summe macht, so ist $x =$ ihrer halben Differenz, und von denen, wenn x zur halben Summe addirt wird, die grössere Grösse herauskommt, so ist x ebenfals ihre halbe

Diffe-

Differenz. Da nun in der Figur GPC die halbe Summe der beyden Winkel ist, und BAC die eine Grösse ist, so muß PCA die halbe Differenz seyn, weil PCA + BAC = der halben Summe ist, ingleichen auch weil PCA + BPC oder BCP = der grössern Grösse ist.

Zu dem 89. §.

Exempel. Es sey AB = 50′, BC = 35′, CA = 25′, so ist BC + CA = 60′, BC — CA (= BG) = 10′.

Log. AB : Log. BC + CA = Log. BC — CA (= BG) : Log. x (= BH).

Log. BC + CA = 1,7781512
Log. BC — CA (= BG) = 1,0000000
Summe = 2,7781512
Log. AB = 1,6989700
Log. BH = 1,0791812, welcher Logarithme zu 12 bis auf sieben Dezimalstellen gehört.

BH = 12′, AH = AB — BH = 50′ — 12′ = 38′, ½ AH = EA = EH = 19′.

1) Im Triangel CEA.

Log. CA : Log. sin. E = Log. EA : x (= Log. sin. ECA).

Log. sin. E = 10,0000000
Log. EA = 1,2787536
Summe = 11,2787536
Log. CA = 1,3979400
Log. sin. ECA = 9,8808136, wozu 49°27′4″ gehört.

der Winkel ECA = 49°27′4″
der Winkel E = 90°

Summe = 139°27′4″, folglich A=40°32′56″.

2) Im Triangel CEB.

Log. CB : Log. sin. E = BE : x (= Log. sin. BCE);

Log. sin. E + Log. BE = 11,2787536
Log. CB = 1,5440680

Log. sin. BCE = 9,7346856, wozu 32°52′27″ gehört.

der Winkel BCE = 32°52′27″
der Winkel E = 90°

Summe = 122°52′27″ folglich B = 57°7′33″.

Daher ist in dem ganzen Triangel BCA.

der Winkel C (= ECA + BCE) = 81°79′31″
der Winkel A = 40 32 56
der Winkel B = 57 7 33

Summe der drey Winkel 180° 0′ 0″.

Zu dem 92. §.

Es wird nicht undienlich seyn, hier das Verhältniß des Maasses verschiedener Länder und Oerter gegen einander in der folgenden Tabelle anzuführen. Es hat sie der Pat. Liesganig, dessen von unserm Herrn Verfasser mehrmahls Erwähnung geschieht, mit vielem Fleisse berechnet, und

und sie ist aus ihm in dem 256. §. des 1. Theils dieses Werks angeführt worden. Wenn man den wienerischen Fuß in 100,000 gleiche Theile eintheilt, so enthält solcher Theile

der Alexandriner Fuß	=	=	112962
der Arabische	=	=	84723
der Straßburger Stadtfuß	=	=	91544
der Bayerische	=	=	92331
der Böheimsche	=	=	93767
der Bononische	=	=	120319
die Castilianische Ehle	=	=	264760
der Dänische Fuß	=	=	100166
der Florentinische	=	=	174195
der alte Griechische	=	=	97382
die Hebräische Ehle	=	=	170131
der Leidensche Fuß	=	=	99326
der Londonsche	=	=	96460
der Meiländsche	=	=	188400
der Märische	=	=	105700
die Neapolitanische Palme	=	=	82889
der Nürnberger Fuß	=	=	96109
der Parisische	=	=	102764
der Rheinländische	=	=	99326
der alte Römische	=	=	93487
der neue Römische	=	=	471160
der Schlesische	=	=	91550

der Sinesische	=	=	101146
der Schwedische	=	=	93951
der Turinische	=	=	162281
der Venetianische	=	=	109900,38.
der Constantinopolitanische	=		224082,61.
der Dantziger	=	=	90739,18.
der Hallische	=	=	94200,33.

Man kann vermittelst dieser Tabelle leicht ein gegebenes Maaß auf ein anderes durch die Regel de Tri reduciren. Gesezt es würden 100 Parisische Klafter gegeben, man wollte wissen, wie viel Wienerische sie ausmachten, so sagte man, 100000 : 102764 = 100 : x (= 102,764 Wien. Klafter). Der Bruch, der hier übrig bleibt, wird so auf Zolle und Linien reducirt. Da ein Fuß 144 Linien hat, so hat ein Klafter 864 Linien, man sagt daher, 1000 : 764 = 864 : x (= 660,196 Wien. Linien). Daher wenn die Linien durch die Division mit 12 zu Zolle gemacht werden, so erhält man 55 Zoll, oder 4 Fuß, 7 Zoll, 0,19 Lin. im Wienerischen Maasse.

Zu dem 97. §.

Sowohl hier, als überall in dem folgenden, wird Duodecimalmaaß verstanden.

Zu dem 107. §.

Wenn nach dem Adrianus Metius der Diameter sich zur Peripherie wie 113 : 355 verhält, so kann man leicht

berech=

berechnen, wie groß der Radius als Bogen betrachtet sey, oder wie viel dem Radius von den Theilen zukomme, worinn man die Peripherie eintheilt, oder aus wie viel Graden, Minuten und Sekunden er bestehe. Man nimt das Verhältniß an, wie sich die Peripherie des Cirkels zu dem Radius desselben verhält, so verhalten sich die Grade, oder Minuten, oder Sekunden der ganzen Peripherie zu dem vierten Gliede, oder

wie 355 zu $\frac{113}{2}$ so 360° (= 21600′, oder 1296000″) zu x,

1296000

113

3888

1296

1296

146448000, durch 2 dividirt ist = 73224000, und dieses durch 355 dividirt, ist = 206264,8″, oder 57°17′44″,8; siehet man die Grösse 206264,8″ als eine natürliche Zahl an, so ist davon der Logarithme = 5,3144251. Der Gebrauch dieses reducirten Radius kommt oft bey der Praxis vor.

Zu dem 128. §.

Diese Auflösung ist eigentlich nur eine geometrische. Uebrigens kann man zwar, wenn es an Raume fehlt, und die auf dem Maaßstabe befindliche Eintheilung in

dem einem Falle für Schue zu groß, oder für Zolle zu klein wäre, die Hälfte, oder $\frac{1}{3}$ nehmen; aber da beym Zeichnen der Figur leicht ein Fehler entstehen kann; so wird dieser theils noch weniger vermieden werden können, wenn die Figur zu sehr ins Kleine gezogen wird, theils ist hier noch der Umstand mit in Betrachtung zu ziehen, daß, wenn man die Seiten halbirt, oder in drey oder mehrere Theile theilt, der Fehler, der in die Seite BC kömmt, in der zu suchenden Seite ab alsdenn doppelt oder dreyfach vergrössert wird. Denn es sey BC = 61′; wir wollen annehmen, daß der Triangel gleichseitig, folglich jeder Winkel = 60° sey. Man trage die Seite BC nach dem verjüngten Maaßstabe auf, und nehme 60′ statt 61′, so wird die Seite ab auch 60′ seyn, und der in ihr entstandene Fehler dem Fehler der Seite BC gleich, und zwar 1′, werden. Man theile nun BC, und begehe einen gleichen Fehler in der Zeichnung, das heißt, man mache diese Seite um 1′ zu klein, nehme sie also statt $30\frac{1}{2}$′ nur $29\frac{1}{2}$′ groß, so wird die Seite ab auch $29\frac{1}{2}$′ seyn, und wenn man sie doppelt nimt, = 59′, der Fehler also doppelt so groß als vorher, nemlich 2′ seyn. Theilet man BC in drey Theile, und begehet in der Zeichnung einen gleichen Fehler, nimt die Seite BC statt $20\frac{1}{3}$′ nur $19\frac{1}{3}$, so wird die Seite ab gleichfals $19\frac{1}{3}$′ seyn, nimt man sie aber dreyfach, so wird sie 58′, folglich der Fehler in der Seite ab dreymahl so groß seyn, als er da war, wenn die

Seite BC einfach genommen wurde. Man sieht hieraus, wie man, wenn man die aufgenommene Linie halbirt oder dreymahl kleiner macht, alsdann einen grössern Fehler begehen könne, und wie unsicher überhaupt die geometrischen Zeichnungen sind.

Zu dem 131. §.

Bey Messungen von dieser Art wähle man, wenn es möglich ist, die Standlinie DE so, daß sie fast mit AB parallel laufe, ingleichen von gleicher Länge mit ihr.

Zu dem 136. §.

Bey diesen Messungen nehme man die Standlinie so nahe als möglich an der zu messenden Höhe, weil sonst der Winkel an c zu klein, und die Rechnung dadurch sehr unsicher wird. Ist dies nicht möglich, so befolge man die Auflösung im 137. §.

Zu dem 141. §.

Wenn die Differenz zweyer Seiten AB und BC eines Triangels ABC nebst allen Winkeln gegeben ist, so kann man daraus die Seiten selbst finden, wenn man die Proportion, die im 74. §. gelehrt wurde, umkehrt und sezt, wie sich verhält der Tangens der halben Differenz A und C zu dem Tangens ihrer halben Summe, so verhält sich die Differenz der beyden Seiten AB und BC zu ihrer Summe. Addiren wir daher die halbe Differenz der Seiten zur halben Summe, so erhalten wir die gröβte Seite,

die dem gröſsern Winkel entgegensteht, ziehen wir die halbe Differenz der Seiten von ihrer halben Summe ab, so erhalten wir die kleinere. Die dritte findet sich nun durch die gewönliche Proportion, da drey Winkel und zwey Seiten bekannt sind.

Zu dem 150. §.

Zweyter Fall. Es sey BAC = 60°, so ist $\frac{1}{2}$BAC = 30°. AD sey = 100′, so wird R : tang. BAD = AD : DL = R : tang. 30° = 100′ : DL.

Log. tang. 30° = 9,7614394
Log. 100′ = 2,0000000
Summe = 11,7614394
Differenz = 1,7614394, wozu 58′ gehören, welches DL ist. Es ist nun BOA das Complement von BAD = 90° — 30° = 60°, daher $\frac{1}{2}$BOA = LOD = 30°, daher sin. des halben Complements BAD, oder sin. LOD : cos. LOD = DL : LO, oder sin. 30° : sin. 60° = DL : DO.

Log. sin. 60° = 9,9375306
Log. DL (=58′) = 1,7634280
Summe = 11,7009586
Log. sin. 30° = 9,6989700
Log. DO = 2,0019886, wozu fast 101′ gehören, da nun DO = R des Cirkels ist, so ist der Diameter KD = 202′.

Zu

Zu dem 151. §.

Will man die Weite AC und BD nicht messen, so kann man auf der Linie CD in der Mitte (wo man aber beyde Standörter zugleich muß sehen können) einen dritten Standort nehmen, und von demselben auf bekannte Art die diesen Punkt einschliessenden Winkel nehmen, und daraus die Aufgabe auflösen.

Zu dem 152. §.

Es können auch die Winkel aus dem Mittelpunkte sehr gut durch ein in denselben geseztes Astrolabium aufgetragen werden, indem man gegen die Dioptern, die nach dem Winkel gestellt sind, eine oder mehrere Meßstangen ausseżt.

Zu dem 155. §.

Der Winkel BaC heißt hier blos in der Rüksicht ein äuserer Winkel, weil er nicht zwischen den Linien des wahren und eingebildeten Triangels liegt, denn sonst befindet er sich in der Mitte der Figur. Auf dem Felde wird das Perpendikel ad vermittelst eines hölzernen Winkelziehers (nicht Sonnenzeigers, wie aus Versehen in dem Text geseżt ist), oder hölzernen Winkelhakens dergestalt gezogen, daß die Spitze des rechten Winkels an den Punkte d zu liegen kommt, und auf dem Punkte, wo die Spitze des Winkelhakens liegt, eine Meßstange eingeseżt wird. Von d, wo man auch eine Stange einseżt, kann

alsdann durch Hülfe dieser beyden Stangen die Linie ad so weit, als möglich, gezogen werden, und dieses Verfahren ist zu dem gegenwärtigen Gebrauche genau genug.

Zu dem 160. §.

Wenn man die negative Differenz = — 2,9578736 unter der Charakteristik 3 sucht, so findet man dazu die Zahl 9076 in den Tafeln. Da aber die Charakteristik nur 2 war, so würde, wenn der Logarithme positiv gewesen wäre, die dazu gehörige Zahl 907,6 seyn, da er aber negativ war, und die Logarithmen negativer Grössen zu 0 bis 0,1 gleich — 0; zu 0,1 bis 0,01 gleich — 1; zu 0,01 bis 0,001 gleich — 2 zur Charakteristik haben, so wird hier Log. — 2, die gefundene Zahl zu einem hundertheiligen Bruch erniedrigen, daß sie gleich 0,09076 wird.

Zu dem 167. §.

Dieser Fall kann sich nur wirklich alsdann zutragen, wenn die Weiten der Objekte sehr groß sind.

Zu dem 168. §.

Man würde daher auf das sicherste von der Gleichheit der Höhen zweyer sehr entfernter Gegenstände schliessen können, wenn sie beyde einerley Senkungswinkel gegen einander hätten.

Zu dem 170. §.

Aus der kleinen hier angeführten Tafel kann man leicht den Centriwinkel der Erde zu einer gegebenen Weite fin=

finden. Wenn man z. B. die Weite von 3000 Fuß hätte, so würde man den Winkel am Centro erhalten, wenn man sagte: Wie 5870,35 Fuß zu 3000 Fuß, so 60 Sekunden zu den gesuchten Sekunden des Winkels = 31″,300. Der Verbesserungswinkel für eine gegebene Höhe oder Tiefe wäre also für 300 Fuß 15″ 48‴.

Zu dem 174. §.

Die Beobachtungen mit dem Barometer, die Höhen betreffend, verdienen ihres Nutzens wegen besondere Aufmerksamkeit. Es wäre sehr gut, wenn fleißige und sorgfältige Naturkündiger diese Materie mehr bearbeiteten und auf festere Regeln zu reduciren suchten. Nicht ohne Grund kann sich hier der Leser ein Buch empfehlen lassen, von dem sich viel erwarten läßt. Es sind dies des gelehrten Herrn D. Wünsch in Leipzig Tafeln zu Höhenmessungen mit Barometern und Thermometern. Nur Schade, daß diese Verrichtung, wie selbst unser gelehrter Herr Verfasser hier gesagt hat, durch manche zufällige Nebenumstände, als Veränderung des Wetters u. dergl. so unsicher gemacht werden. Selbst die in manchen Gegenden oft plötzlich abgebrochene Beschaffenheit des Clima, durch Berge, insonderheit Wälder, als z. B. auf und an dem Harzwalde, kann leicht einen Beobachter, der hierauf nicht Rüksicht nimt, sehr irre führen.

Zu dem 178 §.

Der Winkel der Strahlenbrechung läßt sich, wie unser Herr Verfasser hier richtig bemerkt, nicht durchaus für alle Gegenden bestimmen. Allerdings trägt die Gegend viel dazu mit bey. Insonderheit werden die Gegenstände sehr gehoben, wenn der Beobachter auf einer Anhöhe steht, und jene sich am Ende des Horizonts befinden, zumal wenn an demselben die Dünste stark und in grosser Menge sind. Dieses Erheben wächst, so wie die Höhe zunimt. Auf dem höchsten Berge des Harzgebürges, dem Brokken, ist dies am sichtbarsten. Die grosse Gegend, die man von da aus übersehen kann, hebt sich durch die Strahlenbrechung so gewaltig, daß einem Beobachter, der auf der Spitze des Berges steht, der Horizont fast der Spitze des Berges gleich zu stehen scheint. Hier würde man grosse Fehler begehen, wenn man Beobachtungen, die auf jene Regeln der Strahlenbrechung gegründet wären, anstellen wollte, weil die Menge der aufsteigenden Dünste, die hier die gebrochenen Strahlen in einer besonderen Lage dem Beobachter ins Auge fallen lassen, und andere natürliche, sonst nicht vorkommende Vorfälle, sehr häufig das Auge betrügen.

Zu dem 180. §.

Log. sin. 15° 30′ : Log. R = Log. sin. 1 : x = Log. 0,57310l2 wozu 3 gehört. Da aber der Logarithme gröf-

ser als der Log. von 3 ist, so erhalten wir das übrige in Tausendtheilen, wenn wir sagen, wie die Differenz vom Log. 3 und Log. 4 zur Differenz des Log. 3 und des gegebenen, so 1000 zu x, oder hier 1249387 : 959799 = 1000 zu x = 768. Ferner der Logar. vom sin. 15° 27′ : Log. R = Log. sin. 1 : x = Log. 0,5744701. Da auch dieser Log. zwischen 3 und 4 ist, so erhält man den Bruch durch die gleiche Proportion, nemlich wie die Differ. vom Log. 3 und 4 zur Differenz des Log. von 3 und des gegebenen, so 1000 zu x, oder hier 1249387 : 973488 = 1000 : x = 779. Das Verhältniß beyder Brüche ist also = 779 : 768 = 753 : 742, und die Differenz = 011.

Zu dem 182. §. (Fig. 67.)

Durch die angenommene Proportion Dd : CD = sin. C : R erhält man den Fehler der Seite CB, nehmlich CD, wenn man sie umkehrt und sagt, wie sin. C : R, so Dd : CD, hiernächst durch die, Dd : dC = sin. C cos. C erhält man den Fehler der Seite AC nehmlich dC, wenn man sie umkehrt und sagt: sin. C : cos. C = Dd : dC. Man erhält aber C durch Berechnung des falschen Triangels. Dieser giebt zwar nur ADB welches grösser als C, doch nur um den Winkel DAC ist, welcher keine merkliche Differenz giebt, da man ihn als klein annehmen muß. §. 180.

Zu dem 183. §.

Wenn (Fig. 67.) nur bey dem Winkel A ein Fehler begangen wird, so erstrekt sich die Würkung dieses Fehlers auf die Seite AC und CB. Die Seite BC wird um CD, und die Seite AC um dC falsch. Wird bey dem Winkel A und B auf einerley Art gefehlet, so wird jede Seite durch einen doppelten Fehler verfälscht. Denn der Fehler im Winkel A macht in der Seite BC den Fehler CD, und der Fehler im Winkel B macht in ihr den Fehler DE, daher der Fehler der Seite BC, CD + DE wird. Der Winkel B macht in AC den Fehler cD = ed und der Winkel A, dC, so daß also der Fehler von AC = ed + dC ist. Man erhält nun diese Fehler durch die in beyden Paragraphen gelehrten Proportionen.

Wird auf entgegengesetzte Art gefehlet, das heißt, A wird um CAc zu klein, und B um CBc zu groß, so macht der Fehler bey A in AC den Fehler dC, der die Seite kleiner macht, und der Fehler bey B macht in AC den Fehler Dc, der die Seite grösser macht, folglich ist der ganze Fehler = Dc — dC, und da dC kleiner als Dc ist, so wird die Seite durch die Fehler grösser, als sie wirklich ist. Die Seite BC wird durch den Fehler in B um cE = eD grösser, durch den Fehler in A um CD kleiner gemacht, der Fehler in Bc ist daher CD — eD, da nun CD von ihr abging, so verliehrt sie überhaupt Ce.

Wir erhalten daher nach den im §. gezeigten Proportionen Dc, wenn wir sagen:

sin. C : R = DE : Dc, und
dC, sin. C : cos. C = Dd : dC, ferner
CD, sin. C : R = dD : CD, und endlich
eD, sin. C : cos. C = DE : Ec = eD.

Zu dem 203. §.

Durch Hülfe der Trigonometrie kann man zwar Höhen messen, wenn man zur Höhe hin eine Grundlinie annimt, und die gehörigen Winkel aufnimt, aber wenn sich eine Gegend allmählig erhebt, und sich zulezt in einem Berge oder gar Gebürge verliehrt, so lassen sich jene trigonometrischen Kunstgriffe nicht anbringen, weil wir alsdenn nicht eine ordentliche Grundlinie mit dem Fusse des Berges oder der Anhöhe ziehen, auch keine Winkel aufnehmen können, zumahl wenn die Anhöhe nicht sehr hoch wäre. Wäre sie auf einer Seite durchaus steil und abschüßig, so liesse sich die Messung eher verrichten.

Weil bey einer jeden ordentlichen Libellation die Weite der Standörter genau bekannt seyn muß, um die Proportion der Weite und Elevation, ingleichen der Strahlenbrechung gehörig zu erhalten, und sie daher genau gemessen werden muß, so hat sie der Verfasser hier mit vorzutragen für gut befunden, indem die Weiten durch die Trigonometrie leicht und richtig gefunden werden können.

Zu dem 207. §.

Die Länge der Luftblase zu 8 bis 9 Zoll, bey einem Cylinder von einem Fusse, ist etwas zu groß angegeben. Sechs Zoll sind hinreichend, und verhüten den durch das Reiben am Glase verursachten langsamen Gang derselben genug. Kömmt zu viel Luft hinein, so verliehrt sich die Blase, und es ziehet sich eine gerade wasserleere Linie an ihrer Stelle an dem höchsten Orte der Krümmung des Cylinders, so bald er horizontal steht.

Zu dem 208. §.

Man thut wohl, wenn man in den Stab FD einige hohle Stükke Metall mit Schraubengängen einsezt, damit man das Zeichen vermittelst darinn einpassender Schrauben daran aufschrauben könne. Denn hätte man z. B. das Zeichen in F befestigt, und sollte es bis E herunterlassen, so würde es, weil das Band C über den Stab herübergeht, nicht unter dieses Band herabgelassen werden können. Daher müssen mehrere Schrauben an der Länge des Stabes FD angebracht werden können, nur versteht es sich, daß sie mit der an diesem Stabe befindlichen Abtheilung in gerader Linie stehen müssen, damit man die Höhe des Zeichens über der Erde desto leichter bestimmen könne. Auch muß der untere Theil des Stabes FD, nemlich ED, nicht zu lang seyn, damit das Zeichen mit ihm tief genug herabgelassen werden könne. Der Stab DF muß so wie AB abgetheilt werden.

Zu dem 209. §.

Ist die Weite der Standörter AB 150 Fuß oder 25 Klafter, so beträgt der Winkel am Centro $1''36'''',7$. Die Elevation ist daher äuserst unbeträchtlich, und da die Höhe der Meßstäbe etwa 2 Klafter beträgt, so wird sich also die Höhe der Stäbe zum Radius der Erde = 2 : 3363556 verhalten, und wenn man (Fig. 63.) annimt, daß EF eine kleine Weite von 25 Klaftern, DE und BF die Höhe der Stäbe sey, so verhält sich EC : EF = DE zur Differenz der Linien EF und DB, gleich 0,000014 Klafter, oder $1,''''741824$. Da nun dieses fast gar nichts ist, so können auch die Linien OM und AD oder CB (Fig. 83.) für gleich, und die sie nach einem rechten Winkel berührenden Linien AO und BM für parallel gehalten werden.

Zu dem 210. §.

Wenn in dem Standpunkte A (Fig. 83.) der Fehler der Diopter das Zeichen um Mm, und in dem Standpunkte B dasselbe um Nn höher hebt, als es geschehen sollte, so muß dieser Fehler zweymahl die Höhe des Zeichens, aber jedesmahl auf gleiche Art grösser angeben. Bey der Summe der Höhen des Zeichens wird also nur die Hälfte der Differenz der Höhe des Zeichens von der Höhe des Auges der Fehler seyn, den das Instrument in dieser Weite hervorgebracht hat. Es ist nun hier z. B. Mm auf der einen Seite die Differenz. Da Nn =

Mm ist, so ist also die ganze Differenz, die der Fehler macht, Mm + Nn = 2Mm, ziehe ich hiervon die halbe Summe, d. i. Mm ab, so erhalte ich die Höhe M, und die wahre Linie MO des Horizonts; werden die Dioptern nach ihr gerichtet, so sind sie recht.

Zu dem 211. §.

Je grösser die Linie OM (Fig. 83.) wird, desto grösser wird auch der Fehler Mm, weil er stets die Grundlinie des Triangels wird, den der Winkel, welcher durch den Fehler des Instruments hervorgebracht wird, mit der Horizontallinie macht. Gesezt die Horizontallinie OM würde hier grösser gemacht, und hiesse OX, so würde sich OM zu Mm, wie OX zu dem gesuchten Fehler verhalten, oder OM zu OX wie Mm zu dem Fehler. Weiß man daher den Fehler irgend einer Wage in einer bekannten Weite, so kann man mit ihr jede andere Libelliren, wenn man den Fehler nach der jezt angeführten Proportion suchet.

Zu dem 212. §.

Der Grund von diesem Verfahren liegt gleichfals darinn, daß Mm = Nn = Pp ist, welches bey einer Weite, die sich nicht über 150 oder bis 200 Fuß erstrekt, wahr ist.

Zu dem 214. §.

Weil b, woraus der Bleywurf fällt, mit E einen Quadranten macht, so ist EF die wahre Horizontallinie,

oder

oder EFP. Da nun, wenn der Durchschnittspunkt der Faden über der Oefnung der Augendiopter stehet, der Winkel MOP entstehet, so wird der Winkel NOP diesem gleich seyn müssen, weil er durch eben die Dioptern veranlaßt wird, die den erstern verursachten, obgleich hier der Figur nach es eine andere Diopter zu seyn scheint, nur kommt dieser Winkel unter den Horizont. Wird er also getheilt, so erhält man die wahre Lage der Dioptern auf der Linie EFP.

Zu dem 216. §.

Die Oefnung in dem Behältnisse MN, wodurch der Arm des Cylinders mn geht, darf nicht breiter seyn, als der Arm selbst ist, und muß durchaus rechtwinklicht seyn. Es ist schon genug, wenn der Arm 4, höchstens 6 Zoll, durch die Schraube Cd auf oder niederbewegt werden kann. Wäre dieses zu wenig und der Cylinder an seiner Oberfläche so unregelmäßig, daß dieser Arm gar um 8 oder mehrere Zoll auf oder niedergelassen werden müßte, so ist das Instrument nicht zu gebrauchen, sondern lieber wegzuthun, wenn man richtige Beobachtungen anstellen will.

Zu dem 222. §.

Diese Verbesserung, daß man, wenn man bey der umgekehrt angestellten Libellation eine Differenz findet, die Differenzen addirt und hernach halbirt, führt nur der

Wahrheit näher, ohne sie zu erreichen. Ja es können merkliche Fehler mit einschleichen. Der größte wäre, wenn beyde Differenzen auf gleiche Art fehleten, und entweder zu groß, oder zu klein wären. Gesezt die wahre Differenz der Höhen des Auges und Zeichens wäre 3′6″, und es wäre beyde mahle auf einerley Art gefehlt, so daß die erstere Differenz 3′7″, die andere 3′8″ wäre, so würde die Summe = 7′3″, die halbe Summe = 3′7″ $\frac{1}{2}$ seyn, die Höhe also um 1$\frac{1}{2}$″ zu groß werden. Eben so würde sie um diese Grösse zu klein werden, wenn man die Differenzen um so viel kleiner erhalten hätte. Man muß daher nicht zu sehr auf die Verbesserung der Höhe durch diese Näherung rechnen, sondern lieber die Arbeit von neuen vornehmen, und sorgfältig den Fehler zu entdekken suchen, bis die Differenzen einander gleich sind, welches bey guten Instrumenten, und sorgfältigem Gebrauche, nicht schwehr werden kann. Ausserdem ists nicht leicht möglich, daß man bey dieser Art der Libellation um einige Zolle sollte fehlen können, ohne bald den Irthum zu entdekken. Es könnte sich auch der Fall ereignen, daß die Differenzen einander gleich wären, und doch die Höhe einen Fehler hätte, wenn nemlich beyde auf gleiche Art um eine gleiche Grösse fehleten, daß z. B. die eine 3′7″, die andere auch 3′7″ wäre, indessen ist dieser Irrthum nicht wohl möglich, weil man dabey auf beyden Seiten auf gleiche Art fehlen müßte. Wären die Differenzen in so fern

unrichtig, daß die eine so viel mehr enthielte, als der anderen fehlte, so würde durch die Addition derselben, und Halbirung der Summe die wahre Grösse herausgebracht werden. Wenn z. B. die eine 3′7″; die andere aber 3′5″ angäbe, so wäre die Summe = 6′12″ oder = 7′, und die Hälfte = 3′6″, welches die wahre Höhe ist, die wir erst angenommen haben. Doch wer wird auf dergleichen seltene Fälle Rechnung machen können?

Zu dem 224. §.

Ist die Weite, die durch die kleine Libellation bestimmt werden soll, noch weiter hinaus als AE (Fig. 89.), so muß man sie mehrmahls vornehmen.

Der Ausdruk des Verfassers, daß man alle Höhen, die nach dem Ort A während des Beobachtens hinlagen, samlen und addiren müsse, ist so zu verstehn. Gesezt es hiesse das eine Ende der Wage m, das andere n, so würde während des Beobachtens, wenn man in D anfinge, der Theil der Wage n nach QE sehen, brächte man sie nach B, so würde derselbige Theil n nach NC sehen, dies wären also die Höhen, die zusammen genommen, und addirt werden müßten. Eben so würde bey der erstern Libellation der Theil m nach PC, bey der andern eben derselbe Theil m nach MA sehen; folglich wären beyde Höhen zu addiren, und diese leztere Summe von der erstern abzuziehn. Denn wenn ich 4 — 2 = 2 nehme, ingleichen 6 — 3 = 3, und

addire beyde Differenzen = 5, so erhalte ich eben das, als wenn ich die beyden Subtrahendos 2 + 3 = 5, ingleichen die beyden Minuendos 4 + 6 = 10 addire, und dann von einander abziehe, 10 — 5 = 5.

Zu dem 227 §.

Wenn man annimt, daß AB = 4118 Klafter ist, so ist die Elevation DB = 15 Fuß. Man findet diese Elevation, wenn man aus $AC^2 + AD^2$ die Wurzel zieht, und davon AC abzieht, oder $BD = \sqrt{(AC^2 + AD^2)} - AC$, weil bey A ein rechter Winkel ist. Da nun AD hier eine Länge nach der Wage auf der Erde, AC den Radius der Erde, CD einen Sekanten des Winkels C, und BD die Elevation über dem wahren Horizont ist, so ist $BD = \sqrt{(4118^2 + 3363556^2)} - 3363556$, $= (\sqrt{11313525923060}) - 3363556 = 3363558 - 3363556 = 2{,}52$ Klafter $= 15{,}12$ Fuß.

Uebrigens da bey einer Länge von 4118 Klaftern der Tangens AD von dem Bogen AD nicht merklich unterschieden, und auch EB von ED kaum unterschieden ist, so ist auch AD = 2EB, und man kann, weil die Triangel DBE und DAC, oder ACD und BED einander ähnlich sind, um DB zu erhalten, sagen, 2AC : AD = AD (= 2EB) : BD, wo das erste und dritte Glied verdoppelt wird, weil man zur Weite AD, welche = 2EB ist, die Elevation DB haben will. Es ist daher diese Elevation

tion DB in diesem Falle $= \frac{AD^2}{2AC}$, oder wenn überhaupt die Distanz m heißt, so ist für jede Distanz die Elevation $= \frac{m^2}{2R}$. Nehmen wir die Weite wieder zu 4118 Klafter an, so ist nach diesem Grundsatze die Elevation für 4118 Klafter $= \frac{4118^2}{2R} = \frac{16957924}{6727112} = 2{,}52$ Klaft. $= 15{,}12$ Fuß. Ob diese Elevation gleich mit jener erstern übereinkommt, so weicht sie doch bey sehr grossen Weiten um ein sehr weniges ab, weil hier vorausgesetzt wird, daß der Cosinus des Winkels E, EB = dem Radius ED sey, da der Winkel C = E hier nur von wenigen Minuten ist, und wenn kleinere Distanzen da sind, nur Sekunden ausmacht, wobey der Cosinus freylich dem Radius fast gleich ist. Wäre aber der Winkel C (= E) ein Winkel von einigen Graden, so würde der Cosinus schon merklich von dem Radius unterschieden seyn, und folglich EB nicht mehr gleich ED genommen werden können, man würde die Elevation für die Weite eines Bogens von einem so grossen Winkel durch die Formel $BD = \sqrt{(AC^2 + AD^2)} - AC$ richtig herausbringen. Indessen kann man sicher die folgende Tafel, die auf jener vorher angeführten Proportion beruhet, gebrauchen, da sie für die in derselben benannten Weiten vollkommen richtig ist, und man doch nicht leicht viel grössere Weiten auf einmahl zum Libelliren nimt,

ob man gleich noch doppelt so grosse Weiten, als in der Tafel stehn, richtig nehmen könnte, wie wir erst an dem Exempel von der Weite der 4118 Klafter gesehen haben.

Zu dem 228. §.

Da in der 92. Figur die Elevation $Hi = \frac{Ai^2}{2AC}$, $Lm = \frac{Am^2}{2AC}$ ist, so ist auch $Hi : \frac{Ai^2}{2AC} = Lm : \frac{Am^2}{2AC}$, oder $Hi : Lm = \frac{Ai^2}{2AC} : \frac{Am^2}{2AC}$, und da 2AC stets bleibt, $Hi : Lm = Ai^2 : Am^2$, oder, weil Ai^2 und Am^2 die Elevationen von der Weite Hi und Am sind, so verhalten sich die Elevationen zu einander, wie die Quadrate der Weiten, und umgekehrt. Hierauf beruhet die Erfindung der Weiten in der folgenden Tabelle.

Zu dem 231. §.

Die jetzt vorgelegte Tafel enthält in der ersten Columne gewisse Weiten nach wienerischen Klaftern. Die andere enthält die Elevationen dafür. Die dritte den Winkel, den der Bogen von der vorgesezten Weite am Centro der Erde macht, und der deswegen berechnet ist, damit der Winkel der Strahlenbrechung, der $\frac{1}{9}$ von ihm ist, gefunden werden konnte. Die vierte enthält diesen Winkel auf Theile von Linien, Linien und Zolle reducirt, um durch das Abziehen dieser durch die Strahlenbrechung verursach-

ten scheinbaren Höhe des Objekts die wahre Elevation zu finden.

Bey der Verfertigung dieser Tafel ist man so zu Werke gegangen. Man hat, weil die Elevationen in einer gewissen Ordnung von einer halben Linie an mit $\frac{1}{2}'''$ Differenz, hernach von 1 Zoll an um ganze Linien u. s. w. hinter einander zum Grunde gelegt sind, nach denselben die Weiten berechnet. Man rechnete z. B. zuerst für eine gewisse Elevation die Weite aus, z. B. für die Elevation von 4 Fuß. Da, wenn die Elevation BD, die Weite m, der Radius der Erde A heißt, $BD = \frac{m^2}{2R}$ ist, so wird, wenn die Elevation gegeben ist, $m^2 = 2R \times BD$ seyn, und die Weite, oder $m = \sqrt{(2R \times BD)}$; ist hier nun $BD = 4'$, so wird die dazu gehörige Weite $= \sqrt{(2R \times 4')}$ seyn $= \sqrt{(40362672' \times 4')}$ seyn. Man erhält hierdurch die Weite $m = 12706{,}32$ Fuß $= 2717$ Klafter 4 Fuß 3,84 Zoll, welches fast 2118 Klafter ausmacht, daher diese Zahl, da der Bruch unerheblich ist, für die Elevation 4' angenommen ist. Auf diese Art konnte man nun entweder die andern Weiten für die Elevation von 3'6'', 3', 2', u. s. w. suchen, oder da die Quadrate der Weiten sich wie die Elevationen verhalten, konnte man sie finden, wenn man sagte, wie 4' : 3'6'', so 2118^2 : dem Quadrat der zu 3'6'' gehörigen Weite. Die Wurzel daraus giebt die Weite. Wollte man also

für

für 3′6″ die Weite haben, so war die Proportion 4′ (=48″) : 3′6″ (=42″) = 2118² (= 4485924 welches Klafter sind): dem Quadrat der Weite für die Elevation von 3′6″ = $\frac{4485924}{48}$, = 3925183, daraus die Wurzel gezogen, so erhält man 1981, welches genau mit der Weite für 3′6″ in der Tafel übereinstimmt.

Was die Winkel am Centro anbetrift, so konnten sie leicht durch die Proportion, wie sich die Peripherie der Erdkugel zur gegebenen Weite verhält, so verhält sich 360° zu dem für den Bogen der Weite gehörigen Centriwinkel, für eine gewisse Weite gefunden werden. Hatte man diese, so konnte daraus, nach der Anmerk. zu dem 170 §. für eine jede Weite der Winkel am Centro erhalten werden. Da die Refraktion = $\frac{1}{9}$ des Centriwinkels ist, so wird sie erhalten, wenn man denselben durch 9 dividirt. Z. B. 2′9″,86 = 129″,86 giebt, durch 9 dividirt, 14″,430, welches genau mit der Tafel übereinkommt. Was endlich die auf Linien reducirte Strahlenbrechung anbetrift, so wird diese aus dem Radius, Strahlenbrechung und Weite, wie im 232. §. gelehrt wird, gefunden.

Zu dem 235. §.

Der horizontalliegende mit Zähnen versehene und aus starken Metalle verfertigte Cirkel gh sticht mit einem starken metallenen runden Zapfen in dem obern Theile des

Fuß-

Fußgestelles in einer runden Oefnung, die in ein festes Stükk Metall, das oben in der Mitte des Fußgestelles eingelegt ist, gebohrt ist. Er muß genau einpassen, damit die Wage nicht im geringsten wanke, und darf daher auch nicht zu kurz seyn. Dieses hat in der Figur nicht ausgedrükt werden können.

Zu dem 238. §.

Wäre AB = 304 Klafter, so würde ON = 3‴ seyn. Für AB = 2AC = 304 Klaftern würde die Elevation fast 12‴ seyn. Diese aus o nach m getragen, würden den Ort m bestimmen, auf den gerade der Durchschnittspunkt der Faden, der in O befindlichen Wage, fallen müßte, wenn sie recht wäre. Da aber bey 152 Klaftern die Strahlenbrechung schon um 0,6666‴ die Objekte erhebt, so wird ON um $\frac{2}{3}$‴ zu verbessern seyn, und daher, wenn der rechte Punkt o gefunden werden soll, von NO $\frac{2}{3}$‴ abgezogen, und aus dem Orte des Zeichens n nach o nur $2\frac{1}{3}$‴ hingetragen werden müssen. Da nun auch bey der Weite von 304 Klaftern die Strahlenbrechung die Elevation um 2, $\frac{2}{3}$‴ erhebt, so müssen von der Elevation, die aus o nach m getragen wird, = 12‴, auch 2, $\frac{2}{3}$‴ abgezogen werden, weil sonst das Objekt um $2\frac{2}{3}$‴ zu hoch käme. Wird dieses abgezogen, so muß m in dem Durchschnittspunkte der Faden in der in o horizontal stehenden Wage stehen.

Zu dem 245 §.

In der Tafel sind die Elevationen nach dem Radius der Erde für den Horizont des Meeres genommen. Je grösser die Höhen auf der Erde werden, desto grösser muß auch der Radius der Erde, wenn man ihn bis an diese Höhen zieht, werden. Ob gleich bey den gewöhnlichen Höhen auf der Erde diese Differenz in Rüksicht auf den Radius zum Horizont des Meers nichts macht, so wird sie doch bey grossen Höhen von tausend oder einigen tausend Klaftern merklich. In diesem Falle wird die Elevation desto kleiner, je grösser der Radius wird. Denn da $e = \frac{D}{2R}$, so muß $\frac{D}{2R+d} = e - x$ werden, wo x stets mit d in Proportion stehet. Weiß man daher d (die Differenz des Radius, der in der Tafel angenommen ist, vom gegebenen), so wird man leicht durch die von Verfasser gelehrte Proportion x finden, welches von der in den Tafeln zu D gehörigen Elevation abgezogen werden muß. Es sey z. B. AD (Fig. 100.) = 2118 Klaft. = OM, AN = CO = 1500 Klaftern, so wird die Elevation für AD, nemlich CD = e — x = 4′ — x. Dieses x erhalten wir, wenn wir seßen, R + d : d = e : x = 3363556 + d : 1500 = 4′ : x = 3363556 Klaft. + 1500 Klaft. : 1500 Klaft. = 4′ : x = 20190336 Fuß : 9000 Fuß =

$$4 \text{ Fuß} : x = \frac{9000 \times 4}{20190336} \text{ Fuß} = 3''''{,}305.$$

Dieses abgezogen

zogen von der AD, oder OM in den Tafeln zukommenden Elevation = 4 Fuß, bleibt 3′11″11‴8⁗,695, welches die Elevation bey einer Weite von 2118 Klaftern für einen Horizont ist, der 1500 Klaftern über dem Meere liegt, denn wir haben angenommen, daß OM der Horizont des Meers sey, für welchen die Tafel berechnet ist. Nur wird die Höhe d hier als bekannt angenommen, welches freylich schwehr zu bestimmen ist, am leichtesten aber durch Barometermessungen erhalten werden kann.

Zu dem 249. §.

Wenn das Trapezium ABCD in drey gleiche Theile getheilt werden soll, so messe man zuerst seinen Raum aus. Wenn wir aus dem Orte D nach B eine Diagonale DB ziehen, so erhalten wir die Triangel ABD und BDC. Man erhält die Höhe DK des Triangels ABD, wo wir BA zur Grundlinie annehmen, wenn wir sagen: wie R zu sin. DAB, so DA zur Höhe DK, ingleichen in dem Triangel BDC die Höhe DL, wenn man sagt, wie R zu sin. DBC, so DB zu DL, wobey CB als die Grundlinie angesehen wird.

Es sey z. B. BA = 30′, BC = 25′, CD = 18′, DA = 41′, der Winkel A = 64°, B = 97°, C = 120°, D = 79°.

1) Der Triangel ABD.

Log. R : Log. sin. A = Log. DA : Log. DK

Log.

Log. sin. A = 9,9536602
Log. DA = 1,6127839

Summe = 11,5664441

Log. DK = 1,5664441, wozu 37′ gehören. Die Grundlinie BA = 30′, $\frac{1}{2}$BA = 15, die Höhe DK = 37, folglich der Inhalt des Triangels ADB = 555′.

2) Der Triangel BDC.

Log. R : Log. sin. CBD = Log. DB : Log. DL.

Log. sin. CBD = 9,6259483
Log. DB = 1,5797836

Summe = 11,2057319

Log. DL = 1,2057319, wozu 16′ gehören. Die Grundlinie = 25 mit der Höhe 16 multiplicirt und durch 2 dividirt, giebt den Inhalt des Triangels BDC = 200′.

Der Triangel ABD = 555′
Der Triangel BDC = 200′

Inhalt des Trapeziums ABCD 755′.

Wenn man zum andern die Winkel BCD und CDA hat, so ergiebt sich der Winkel ECD = 180° — DCB hier = 60°, hiernächst der Winkel EDC = 180° — CDA = 101°. Da nun CD bekannt ist, so läßt sich die Seite EC finden, wenn ich sage, Sin. E (= 19°) : CD = sin. EDC (= sin. 79°) : EC,

Log.

Log. CD = 1,2552725
Log. sin. EDC = 9,9919466

Summe = 11,2472191
Log. sin. E = 9,5126419

Log. EC = 1,7345772, wozu 54′ gehören. Die Höhe LD = 16 mit EC multiplicirt und durch 2 das Produkt dividirt, giebt den Inhalt des Triangels ECD = 432′.

Drittens. Um die Höhe des Triangels BEA zu finden, nehme man AB zur Grundlinie an, und sage R : sin. EBF = EB zur Höhe des Triangels BEA.

Log. sin. EBF (= 180° — EBA) = 83° = 9,9967507
Log. EB (= EC + CB) = 79 = 1,8976271

Summe = 11,8943778
— R = 1,8943771,

wozu 78′ gehören. Die Höhe des Triangels BEA = 78′, die Grundlinie = 30′, daraus ergiebt sich sein Inhalt = 1170′.

Viertens. Das Trapezium ABCD war = 755′, davon ist $\frac{1}{3}$ = 2516″, $\frac{2}{3}$ = 5032″.

Fünftens. Man sage nun, der Inhalt des Triangels ABE verhält sich zu demselbigen Inhalt, wenn er um $\frac{1}{3}$ des Trapeziums verringert ist, wie sich das Qua-

drat der Höhe des Triangels ABE zu dem Quadrate verhält, dessen Wurzel von der Höhe des Triangels ABE abgezogen werden muß, oder

$$11700'' : 11700'' - 2516'' = 608400'' : x^2$$

daraus x^2 sich ergiebt, wovon die Wurzel $= 691''$ ist, diese von der Höhe des Triangels ABE abgezogen, läßt $89''$ übrig

Sechstens. Mit AB ziehe man in der Weite $89''$ eine Parallellinie, so ergiebt sich die Linie GH, welche einen Drittheil des Trapeziums abschneidet. Den andern Theil findet man, wenn man sagt,

$$11700'' : 11700'' - 5032'' = 608400 : x^2,$$

hierauf aus x^2 die $\surd$ gezogen, diese von der Höhe des Triangels ABE abgezogen, läßt hier $192''$ übrig, in welcher Weite man mit AB die Linie PQ ziehen muß, die den zweyten Theil des Trapeziums giebt. Doch sind in diesem Exempel zum Theil die Zolle weggelassen, wodurch es nicht ganz akkurat geworden ist (in dem Exempel selbst ist das Dezimalmaaß gebraucht worden), auch sind die Logarithmen nur schlechthin, ohne Näherung, gebraucht.

Zu dem 249. §. (Zweyter Fall.)

Daß nach dem Abzuge des dritten Theils des Inhalts der ganzen Figur von GHDC die halbe Höhe des Triangels HIG gefunden wird, wenn man mit GH in den Rest

des

des Viereks GHDC dividirt, folgt aus dem bekannten geometrischen Satze: Die Höhe des Triangels wird erhalten, wenn man in den Inhalt desselben mit der halben Grundlinie dividirt, und umgekehrt. Erhält man nun die Höhe des Triangels HIG durch diese Rechnung, so kann man die Linie GI, oder den Punkt I, durch welchen aus G die Linie zu ziehen ist, leicht finden, wenn man ein Perpendikel aus dem Punkt H, nach CD hin, von der Länge der erhaltenen Höhe fallen läßt. Das Ende dieses Perpendikels ist der Punkt, durch welchen man die Linie GI ziehet. Man kann dieses Perpendikel auf dem Felde ziehen, wenn man das Astrolabium in H sezzet, und nach 90° eine Linie zieht. Man kann indessen den Ort auf HD auch nach der vom Verfasser gelehrten Art finden, wenn man den Winkel GHI (der hier stumpf ist) mißt, und nun sagt, wie sin. GHI : R, so die gefundene Höhe des Triangels GHI : HI. Die gefundene Grösse HI trägt man dann aus H nach D zu auf der Grentze der Seite HD aus.

Zu dem 251. §.

Der Winkel EBD ist = 2BAC. Denn ABD hat als ein gleichschenklichter Triangel bey A und D gleiche Winkel. Daher ist 2A = A + D. Da nun der äusere EBD den beyden inneren gleich ist, so ist EBD = A + D = 2A oder 2BAC.

Weil ferner der Triangel BDG gleichschenklicht ist, so ist BGD = GBD, da nun GBD = 2BAC war, und GDF = BGD + BAC (oder GAF) ist, so ist auch GDF = 2BAC + BAC = 3BAC.

HGL = GHD + GAH (oder BAC). Da nun (weil der Triangel DGH gleichschenklicht ist) GHD = GDF ist, so ist HGL = GDF + BAC, und weil GDF = 3BAC, so ist HGL = 3BAC + BAC = 4BAC.

Eben so ist LHK = GLH + LAH, oder (weil GLH = HGL) = HGL + LAH, und da HGL = 4BAC, so ist LHK = 4BAC + BAC = 5BAC.

Und sezt man die Werthe, u. s. f. AG = 1 + 4cc — 2: Denn AG ist = AB + BE + EG, und sezzen wir die dafür schon bekannten Werthe, so ist AG = 1 + 2cc — 1 + 2cc — 1 (weil BE = EG) = 1 + 4cc — 2, oder auch 4cc — 1.

Für den Sinus zum vierfachen Winkel gilt AB : BC = AH : IH, oder in Werthen, $1 : \sqrt{1 - cc} = 8c^3 - 4c : IH = 8c^3 - 4c\sqrt{1 - cc}$. Denn AH ist = AC + CD + DF + FH, oder in Werthen, $c + c + 4c^3 - 3c + 4c^3 - 3c$ (weil AC = CD, DF = FH) = $2c + 8c^3 - 6c = 8c^3 - 4c$. Für den Cosinus zum vierfachen Winkel gilt AB : AC = AH : AI, in Werthen, $1 : c = 8c^3 - 4c : AI = 8c^4 - 4c^2$, da nun GI = AI — AG

— AG und $AG = 4cc - 1$, so wird, wenn dies von AI abgezogen wird, $GI = 8c^4 - 8c^2 + 1$ seyn.

Für den Sinus zum fünffachen Winkel gilt AB : BC $= AL : LK$, in Werthen, $1 : \sqrt{1 - cc} = 16c^4 - 12c^2 + 1 : LK = 16c^4 - 12c^2 + 1\sqrt{1 - cc}$; denn AL ist $=$ $AG + 2GI = 4cc - 1 + 16c^4 - 16c^2 + 2$, beyde Werthe addirt, oder

$$\begin{array}{rl} 2GI = & 16c^4 - 16c^2 + 2 \\ + AG = & \qquad 4c^2 - 1 \\ \hline & 16c^4 - 12c^2 + 1 = KL. \end{array}$$

Für den Cosinus zum fünffachen Winkel gilt AB : AC $= AL : AK$, in Werthen, $1 : c = 16c^4 - 12c^2 + 1 : AK = 16c^5 - 12c^3 + c$, davon AH abgezogen, oder

$$\begin{array}{rl} AK = & 16c^5 - 12c^3 + c \\ - AH = & \qquad 8c^3 - 4c \\ \hline & 16c^5 - 20c^3 - 5c = HK, \end{array}$$

welches mit der folgenden Tafel übereinkommt. Auf diese Art kann man für alle vervielfältigte Winkel die Sinus und Cosinus suchen.

Zu dem 252. §.

Der binomische Satz $(c + \sqrt{1 - cc})$, der aus dem Cosinus und Sinus des einfachen Winkels besteht, wird durch die gewönliche Art, wie alle andere Grössen, zu einer verlangten Potenz erhoben. Hier, zum Beyspiel, wenn er zur vierten Potenz erhoben werden soll, ist

$$\frac{c^4+4c^3\sqrt{1-cc}+6c^2(1-cc)+4c(1-cc)\sqrt{1-cc}+(1-cc)^2}{c^4+3c^3\sqrt{1-cc}+3c^2(1-cc)+c(1-cc)\sqrt{1-cc}}$$

$$\frac{c^3\sqrt{1-cc}+3c^2(1-cc)+3c(1-cc)\sqrt{1-cc}+(1-cc)^2}{c+\sqrt{1-cc}}$$

$$\frac{c^3+3c^2\sqrt{1-cc}+3c(1-cc)+(1-cc)\sqrt{1-cc}}{c+\sqrt{1-cc}}$$

$$\frac{c^3+2c^2\sqrt{1-cc}+c(1-cc)}{c+\sqrt{1-cc}}$$

$$\frac{c^2\sqrt{1-cc}+2c(1-cc)+(1-cc)\sqrt{1-cc}}{c+\sqrt{1-cc}}$$

$$\frac{c^2+2c\sqrt{1-cc}+(1-cc)}{c^2+c\sqrt{1-cc}}$$

$$\frac{c\sqrt{1-cc}+(1-cc)}{c+\sqrt{1-cc}}$$

$$c+\sqrt{1-cc}$$

Davon

die vierte Potenz,

die dritte Potenz,

die zweyte Potenz,

davon das 1, 3, und 5 Glied für den Cosinus; das zweyte und vierte aber für den Sinus mit abwechselnden + und — gilt.

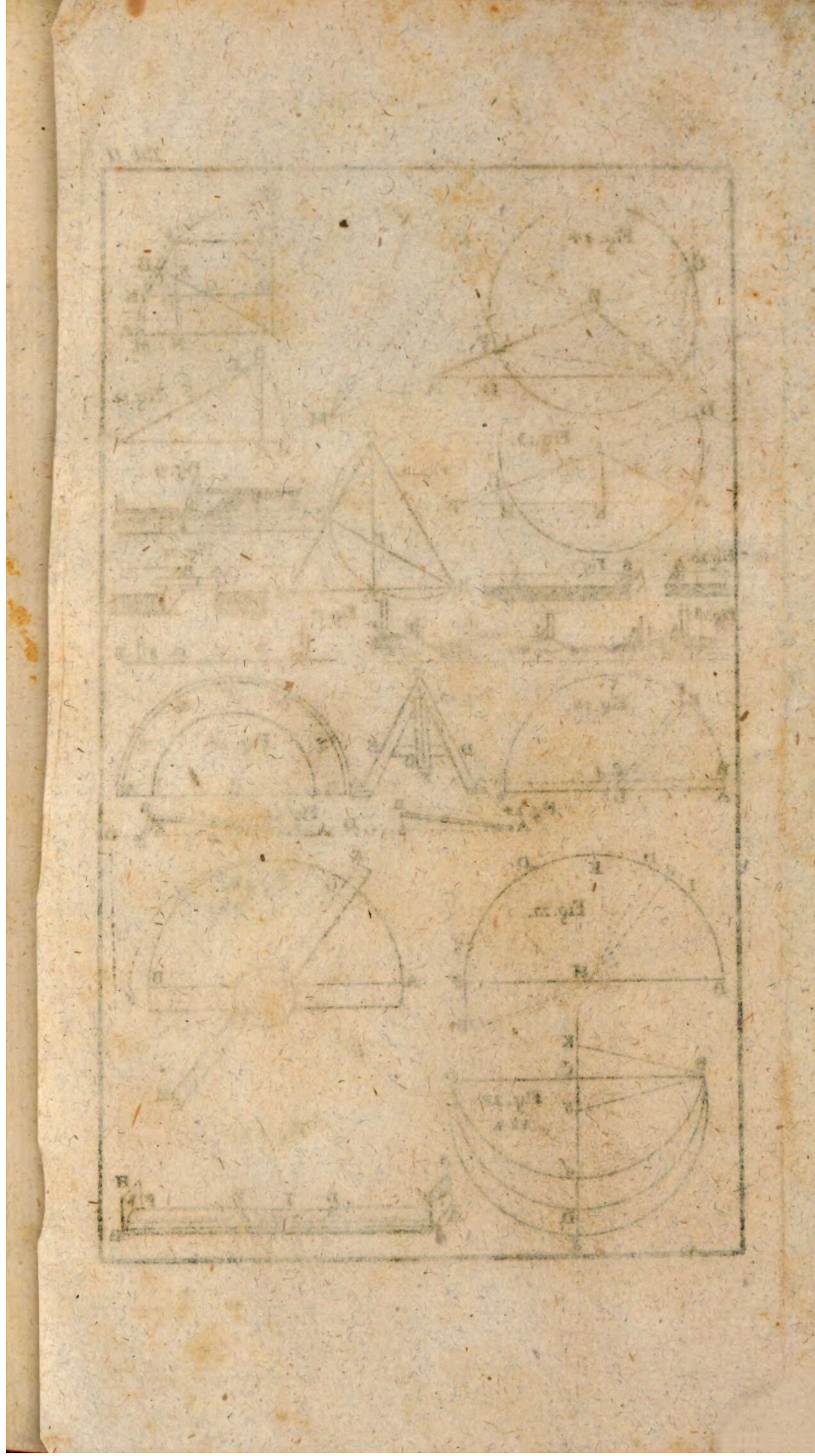
Zu dem 256. §.

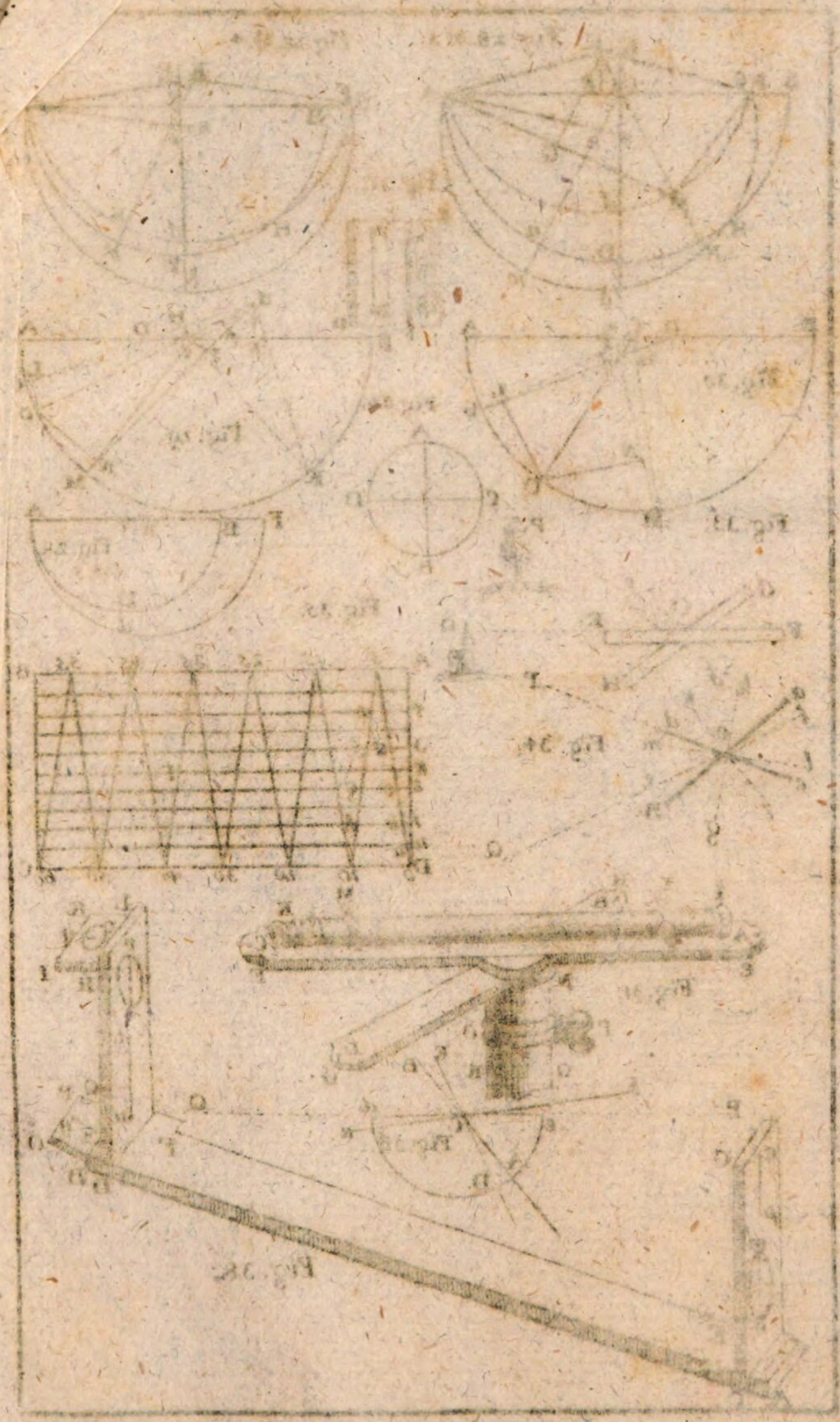
Es ergänzt $\frac{C-A}{m}$ und $\frac{A+(m-1)C}{m}$ einander zu C. Um dies durch Zahlen zu sehen, mag $C=360°$, $A=60°$, $m=4$ seyn, so wird $\frac{C-A}{m}=\frac{360°-60°}{4}$ $=75°$, und $\frac{A+(m-1)C}{m}=\frac{360°\times 3+60°}{4}=$ $\frac{1140°}{4}=285°$, und $75°+285°=360°=C$ seyn.

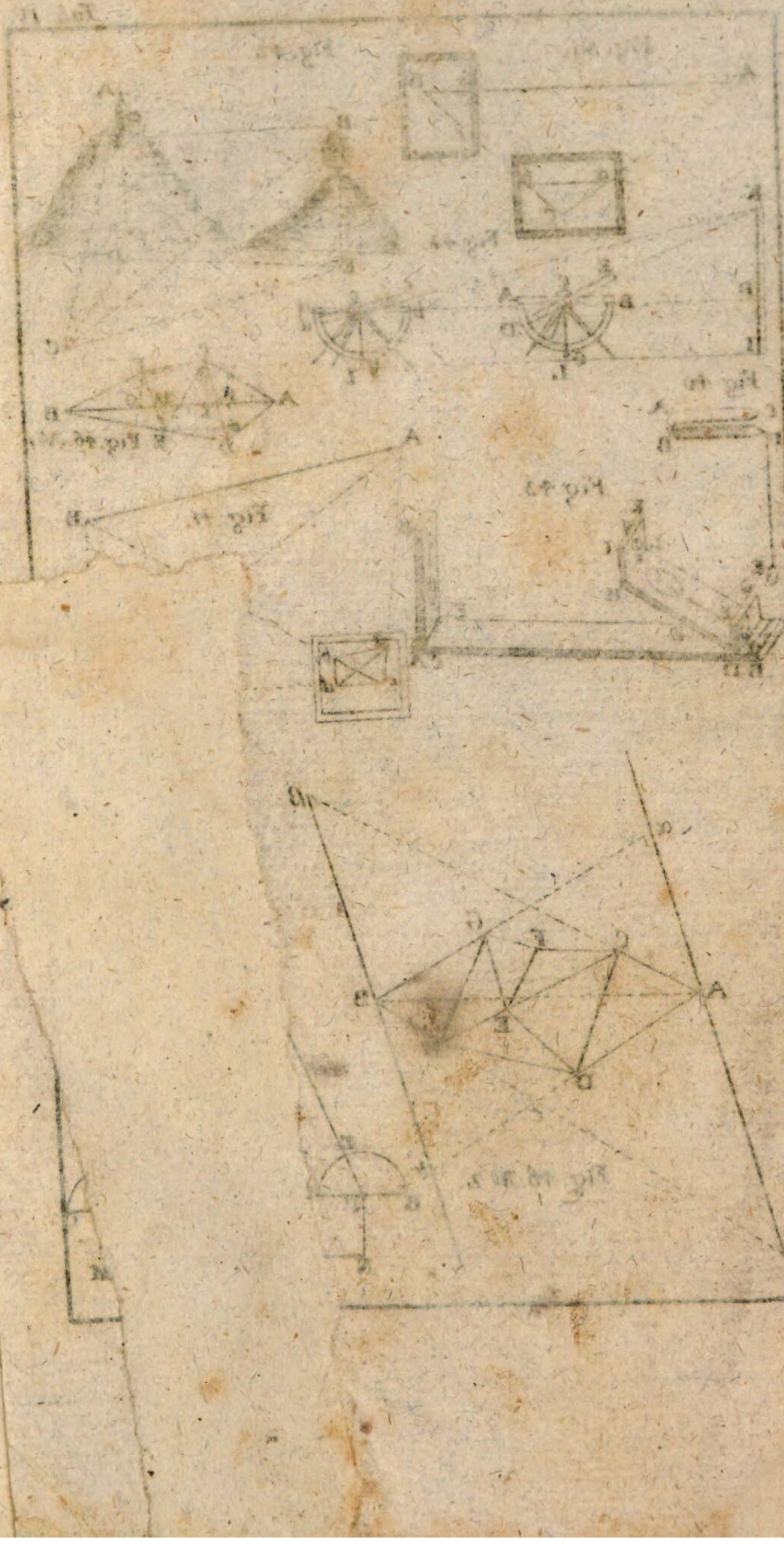
ENDE.

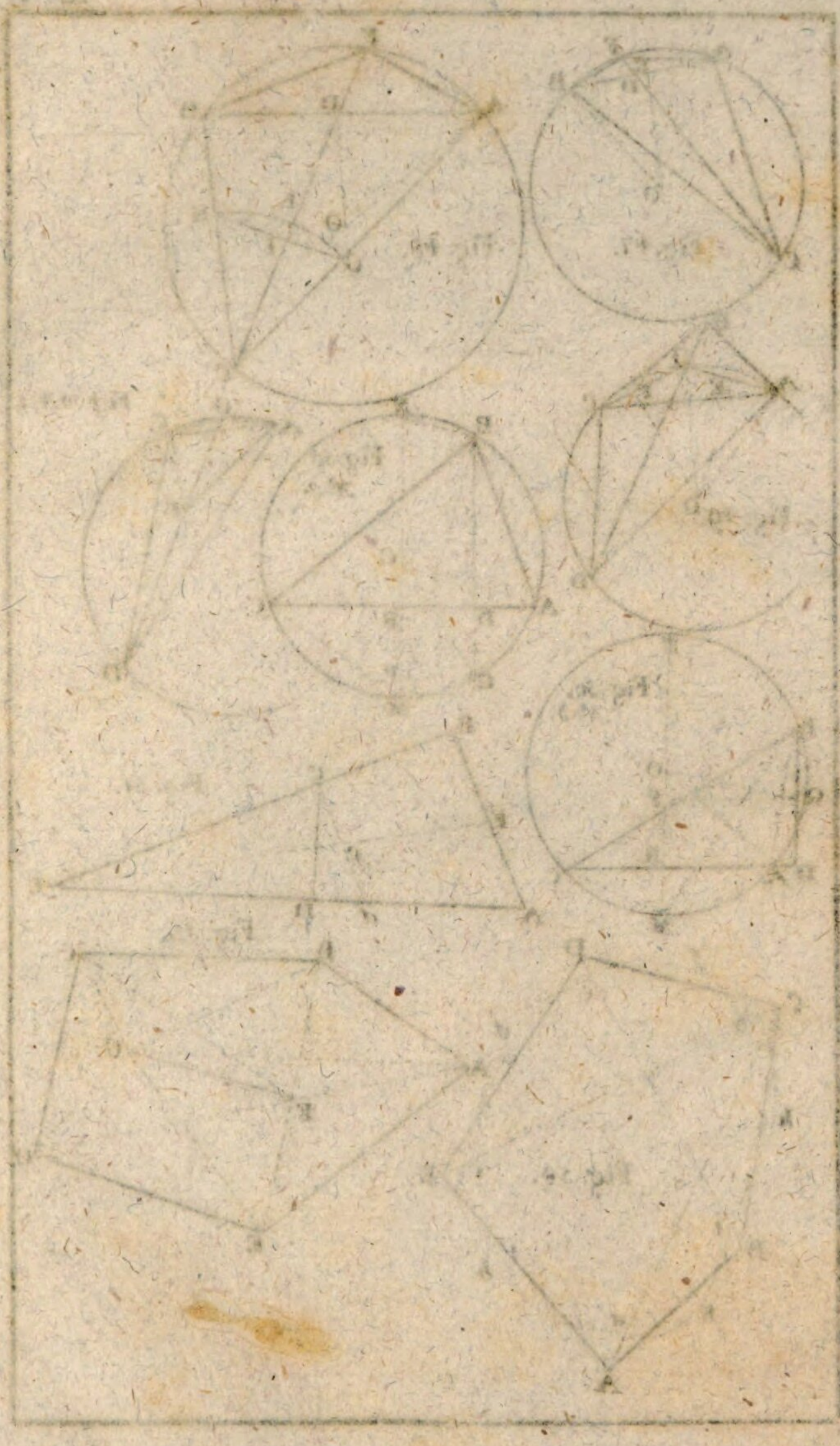
Nachricht für den Buchbinder.

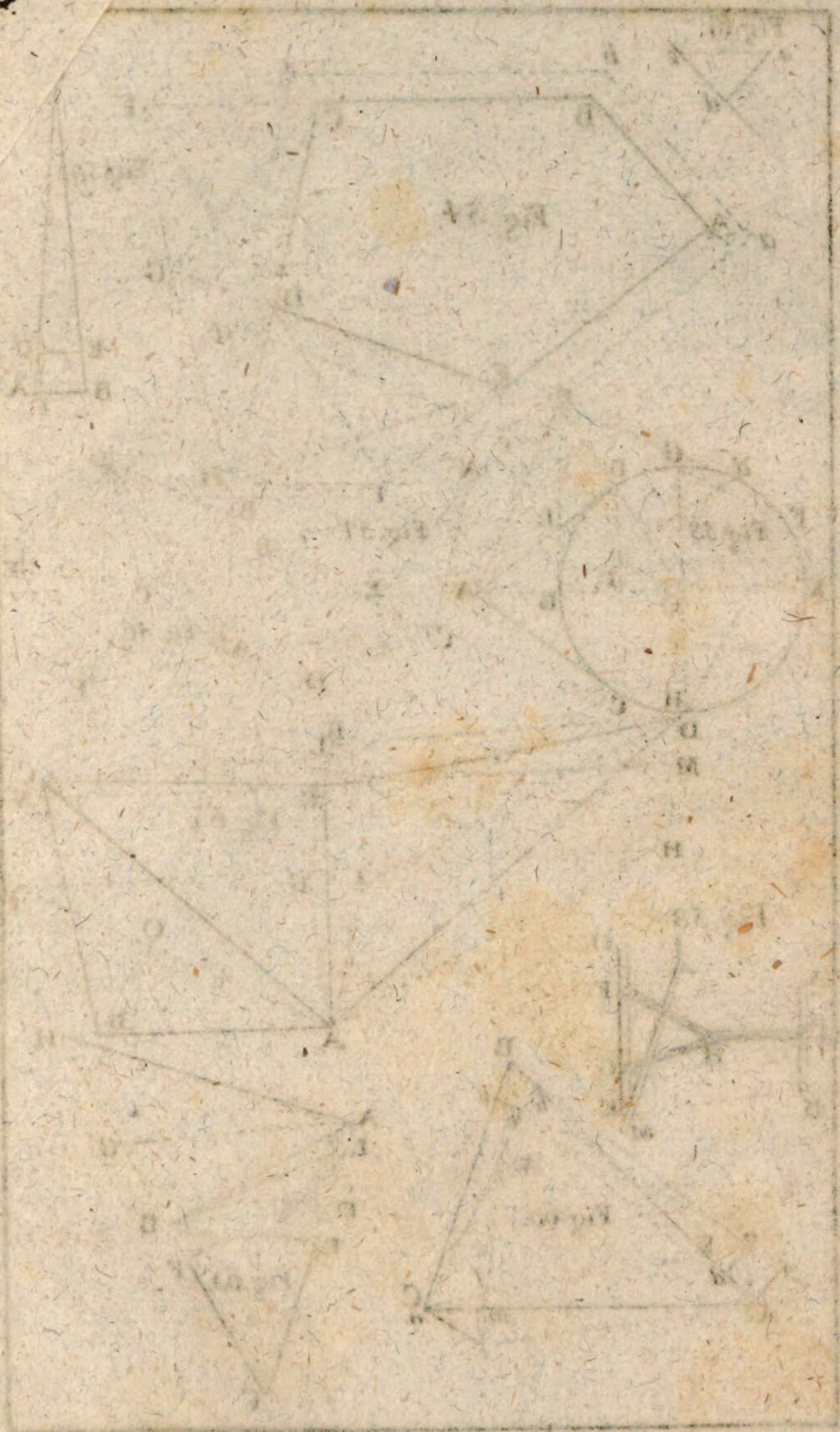
Die eilf Kupfertafeln werden so am Ende des Buchs auf ein weisses Blatt geheftet, daß sie beym Lesen herausgeschlagen werden können.

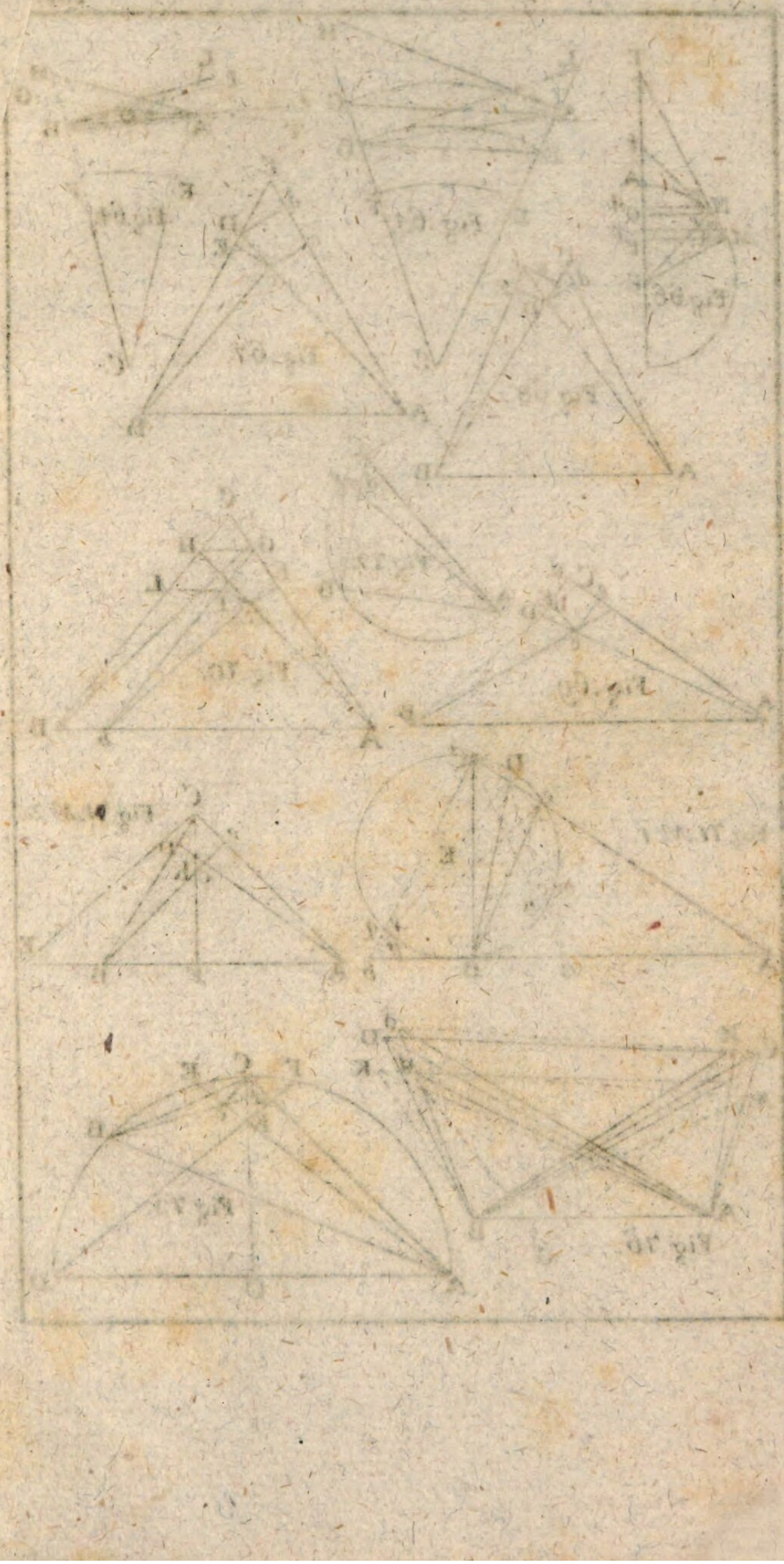


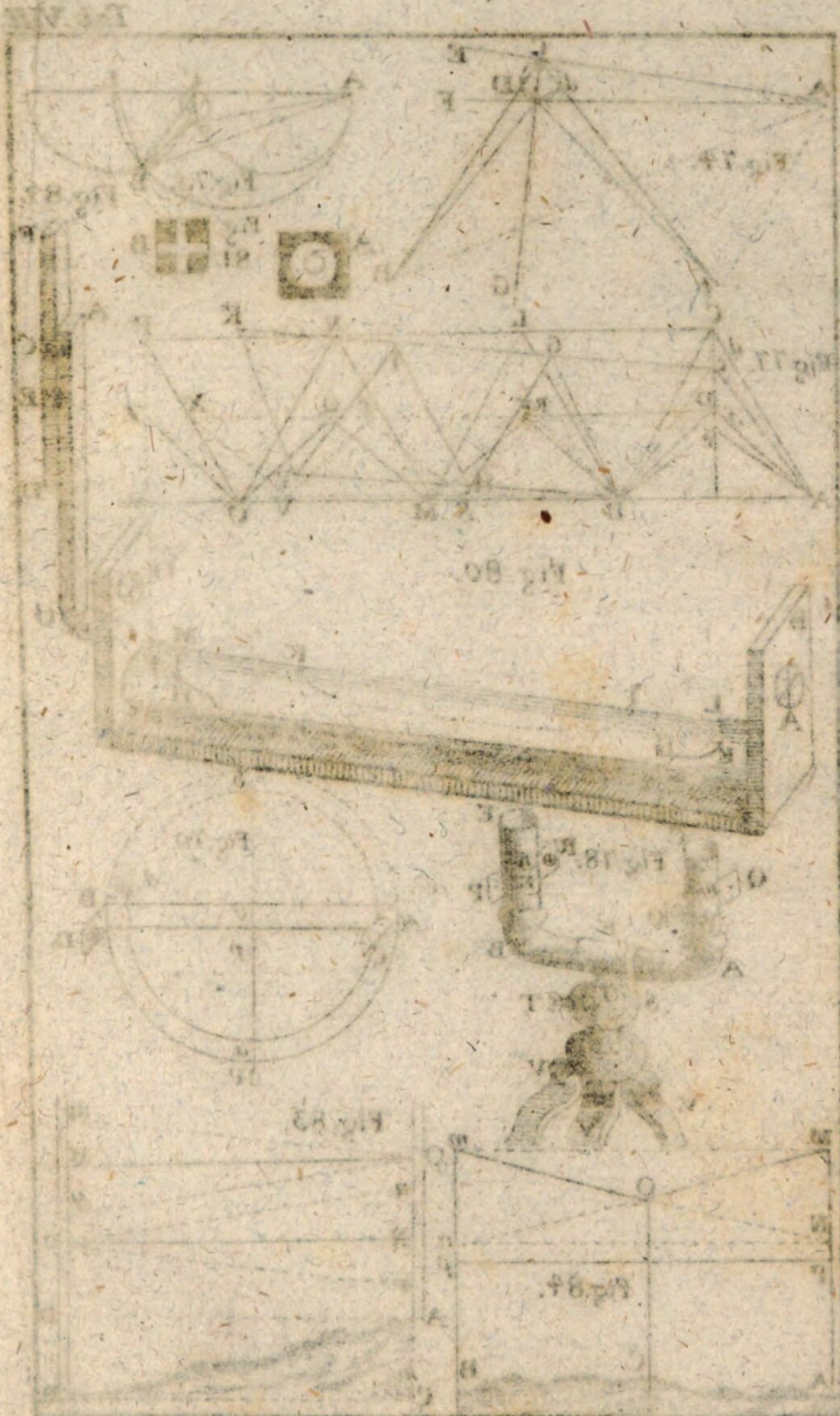


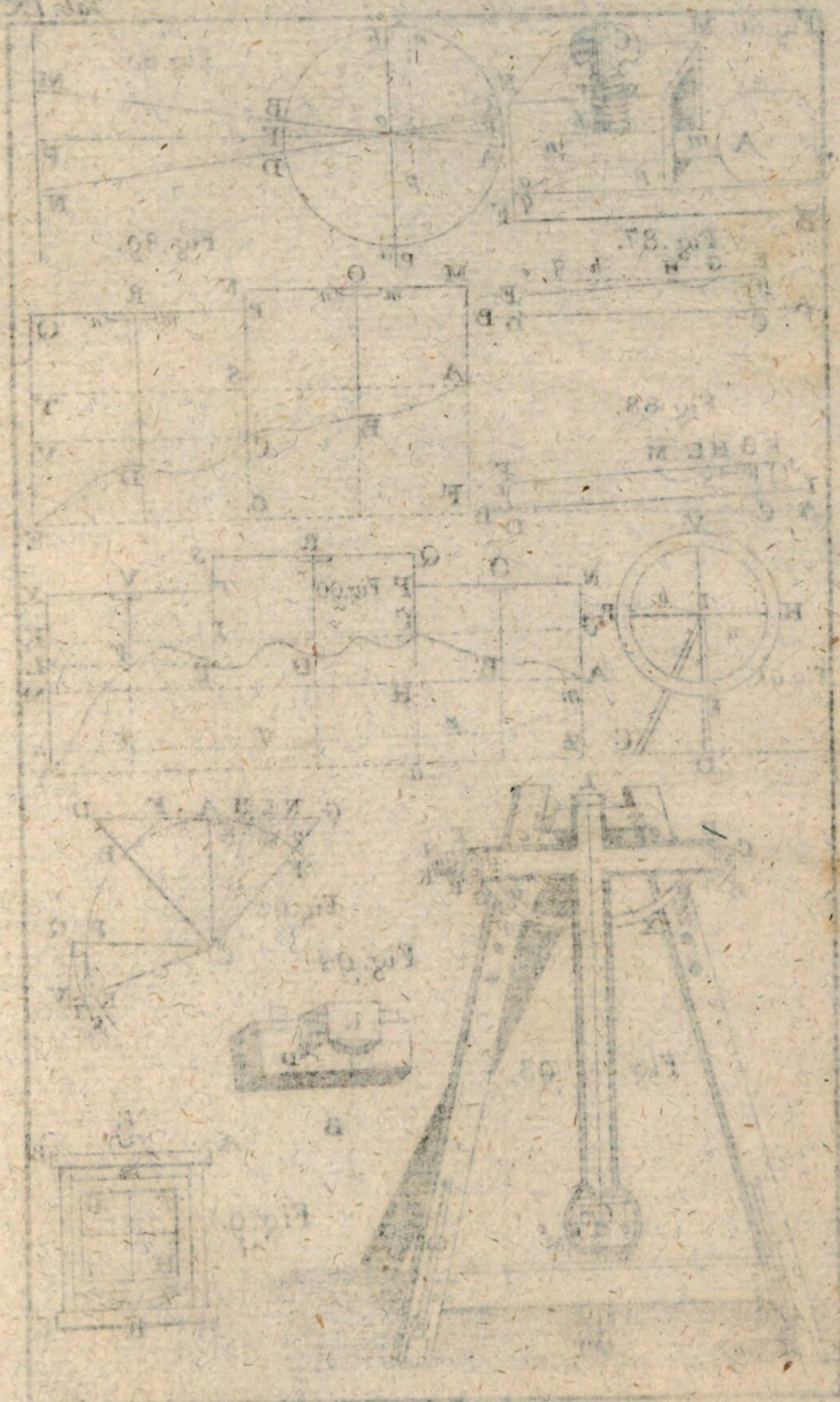












112

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Scherffer, Karl,

Carl Scherffers theoretische und praktische Ebene Trigonometrie

Halle 1782
Math.p. 496
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082729-8
VD18 1531622X-001